

THESES

présentées

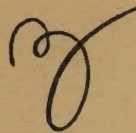
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Pierre-Loïc BOURGET



1ère THESE : Contribution à la détermination expérimentale et théorique
des déformations de surface libre

2ème THESE : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 Octobre 1965 devant la Commission d'Examen

M. RAVILLY Président

M. PAUC
M. PIRONNEAU } Examinateurs

THESES

présentées

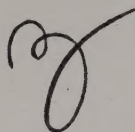
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Pierre-Loïc BOURGET



1^{ère} THESE : Contribution à la détermination expérimentale et théorique
des déformations de surface libre

2^{ème} THESE : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 Octobre 1965 devant la Commission d'Examen



M. RAVILLY Président

M. PAUC
M. PIRONNEAU } Examinateurs

UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen M. BRILLOUET

Assesseur M. GARRIGUES

Professeurs Titulaires

MM. BRILLOUET

PAUC

PETRESCU

RAFFIN

PIRONNEAU

RAVILLY

BOULLOUD

COLLET

DUNOYER

GRAFF

M^{lle} DEBRAUX

MM. GARRIGUES

PIERI

Mathématiques

«

«

«

Mécanique

«

Physique

«

Chimie

«

Biologie

«

Biologie animale

Professeurs et Maîtres de Conférences

MM. MOLINARO

VIVIER

BALQUET

AVIGNON

MEZENCEV

GOUREAUX

LASKAR

MINN

MOUTON

M^{lle} OFFRET

MM. GOBIN

JOLIVET

QUINIOU

ROUXEL

WOJTKOWIAK

MARTIN

SELLIER

LE DOUARIN

AMOURIQ

DUPONT

CAVET

OTTMANN

FORESTIER

Mathématiques

«

Mécanique

Physique

«

«

«

«

«

«

Chimie

«

«

«

«

«

Biologie

«

«

«

Géologie

«

«

Secrétaire

M. PAILLET

Le présent travail a été effectué au Bassin d'essais des Carènes et au Centre de Calcul Scientifique de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur RAVILLY pour l'intérêt permanent qu'il a manifesté vis-à-vis de mon travail, pour les conseils qu'il a bien voulu m'accorder.

Je remercie Monsieur le Professeur PAUC et Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'E.N.S.M., qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer au jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur BALQUET, tous mes camarades du Bassin des Carènes et du Centre de Calcul ainsi que le personnel technique, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée.

A ma mère,

A ma femme,

en témoignage d'amour et d'affection

- I N T R O D U C T I O N -

Notre propos est d'apporter une modeste contribution aux techniques de relevé des déformations de la surface libre d'un liquide.

Après avoir rappelé les principales techniques utilisées, souvent très différentes, nous présentons une nouvelle méthode.

Cette méthode est très générale. Une application particulière est l'étude des champs de vagues des maquettes lors des essais en bassin de traction ou de giration. Nous obtenons un relevé instantané du champ étudié : nous pouvons ainsi étudier des phénomènes permanents (par exemple une traction à vitesse constante) ou transitoires (accélération ou décélération). Par ailleurs les moyens matériels nécessaires sont très modestes.

Nous avons déjà présenté cette méthode dans les Annales de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique en 1963. Nous en donnons cependant le développement complet pour la première fois [9].

PRINCIPALES TECHNIQUES UTILISEES

Nous trouvons dans les pages qui suivent l'exposé de nombreuses méthodes qui comportent souvent la prise d'un cliché. Nous avons volontairement ignoré les différents types de capteurs dont les applications sont très spécialisées, à l'exception des sondes dont le domaine d'utilisation est très vaste.

- Procédé de l'ombre.
- Sondes .
- Stéréoscopie.
- " Ciel étoilé "

- PROCÉDE DE L'OMBRE [1]

A l'Institut d'Hydrodynamique de Sibérie (U.R.S.S.), R.J. Votcekhovski et A.A. KOVAL' ont mis au point un procédé très simple pour relever les profils de la houle dans leur bassin d'agitation.

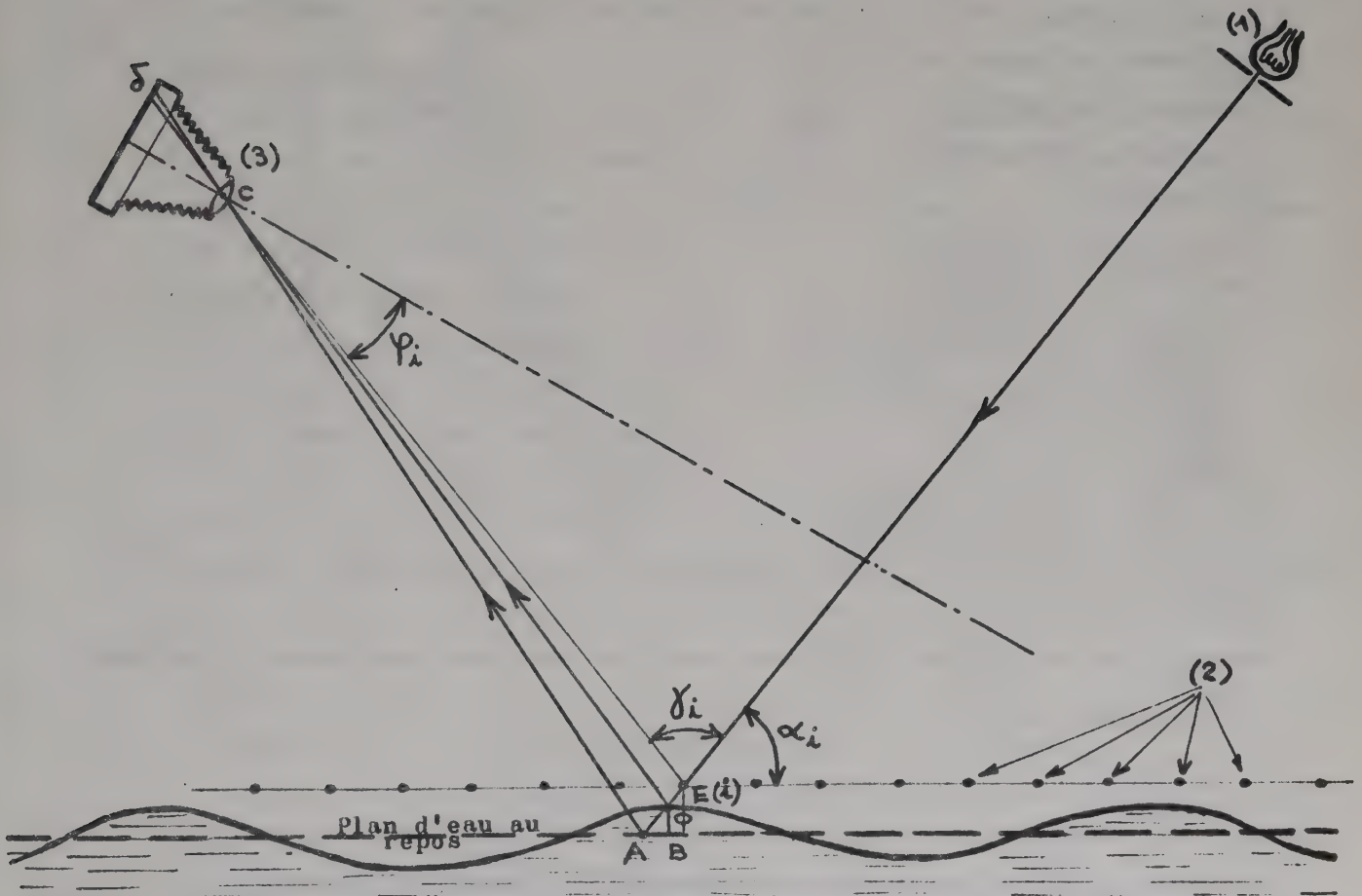
PRINCIPE :

On place un filet constitué de fils noirs parallèles au-dessus de la surface libre et parallèlement au plan de cette surface libre au repos. Le filet est éclairé par des sources lumineuses. A chaque fil correspond une ombre sur la surface libre. La méthode consiste à étudier l'ombre lorsque la surface libre est déformée.

MISE EN OEUVRE :

On place un appareil photographique au-dessus de la surface libre (3).

δ : déplacement sur le cliché de l'ombre.



Soit une source lumineuse (1) et le filet (2) dont le i° fil est en E.

Les ombres sont en A (au repos) et en O (surface libre déformée).

Les positions relatives des fils du filet, des sources lumineuses et de l'appareil photographique sont définies à partir des 3 angles suivants:

- φ_i : angle formé par l'axe optique de l'objectif et de la direction du i° fil du filet.
- α_i : angle formé par le faisceau lumineux éclairant le i° fil et le plan horizontal.
- γ_i : angle formé en joignant le point E du i° fil à la source lumineuse (1) et au centre optique C.

Soit encore k le rapport de réduction donné par l'appareil photographique.

$$k = \frac{AO'}{\delta}$$

d'où : $AO' = \delta . k$

Dans le triangle AOB:

$$h = AO . \sin \alpha_i$$

Dans le triangle AO'O, le segment AE étant vu sous un très petit angle ($< 2^{\circ}$), nous avons le rapport :

$$\frac{AO}{\sin \widehat{AO'O}} = \frac{AO'}{\sin \widehat{O'OA}}$$

$$\widehat{AO'O} = \frac{\pi}{2} - \varphi_i$$

$$\widehat{O'OA} = \pi - \gamma_i$$

d'où :

$$\frac{AO}{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_i)} = \frac{AO'}{\sin(\pi - \gamma_i)}$$

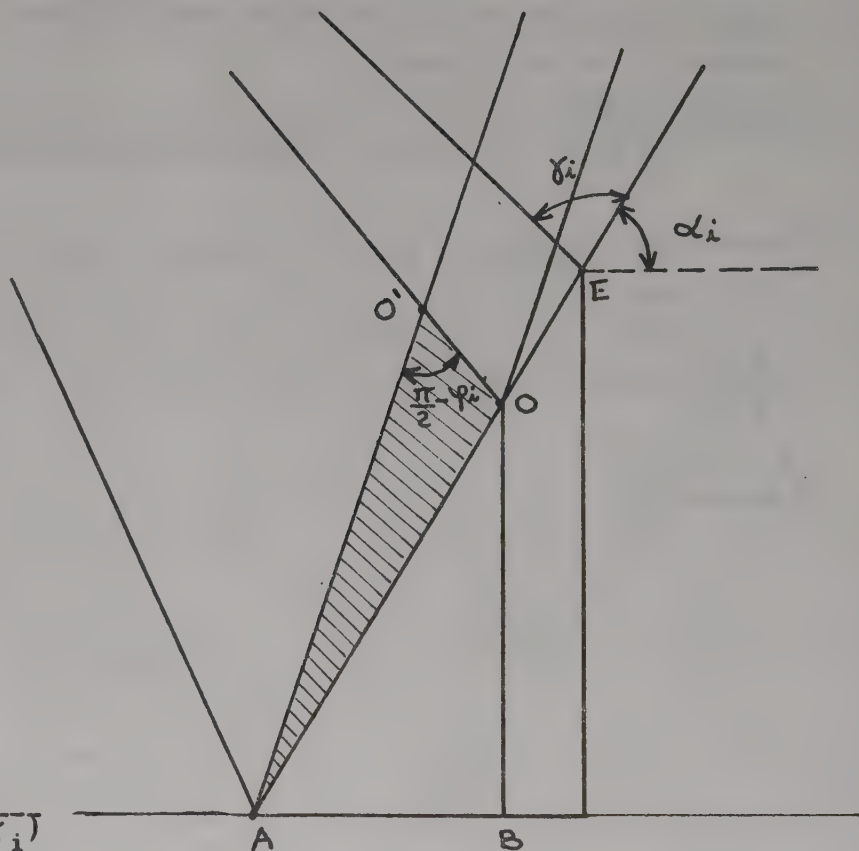
Soit :

$$\frac{AO}{\cos \varphi_i} = \frac{AO'}{\sin \gamma_i}$$

l'expression de h :

$$h = \frac{AO' . \sin \alpha_i . \cos \varphi_i}{\sin \gamma_i}$$

$$h = \frac{\delta . k . \sin \alpha_i . \cos \varphi_i}{\sin \gamma_i}$$



On obtient donc sur le cliché une série d'ombres curvilignes qui sont les coupes verticales de la surface d'onde.

- SONDES : Mesure d'une résistance ou d'une capacité

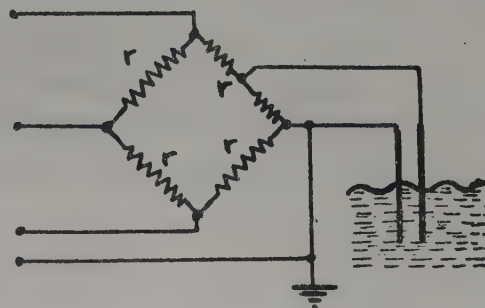
Pour mesurer les fluctuations de niveau d'une surface libre horizontale, on utilise couramment des sondes classées en deux grandes catégories.

a) Mesure d'une résistance:

Une sonde immergée verticalement et partiellement, possède une certaine résistance. Si la profondeur d'immersion varie, la résistance varie. En particulier, si la variation de résistance est faible on fait un montage en pont, comme l'indique le schéma ci-contre.

Cette méthode est peu utilisée car

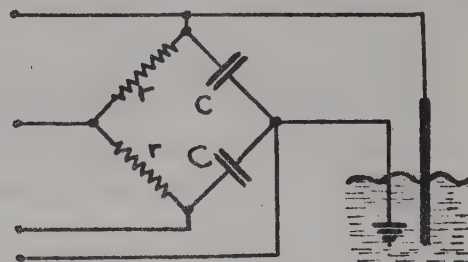
il est difficile de tenir compte des variations de température du fluide. Par ailleurs la réponse n'est pas linéaire.



b) Mesure d'une capacité:

On immerge pour les mêmes raisons une sonde pour laquelle on mesure la capacité qui existe entre elle et le liquide. A toute variation de profondeur d'immersion correspond une variation de capacité. On réalise un montage en pont, comme l'indique, par exemple, le schéma ci-contre.

La capacité est directement proportionnelle à la longueur immergée. En outre on peut négliger les variations de conductibilité du fluide.



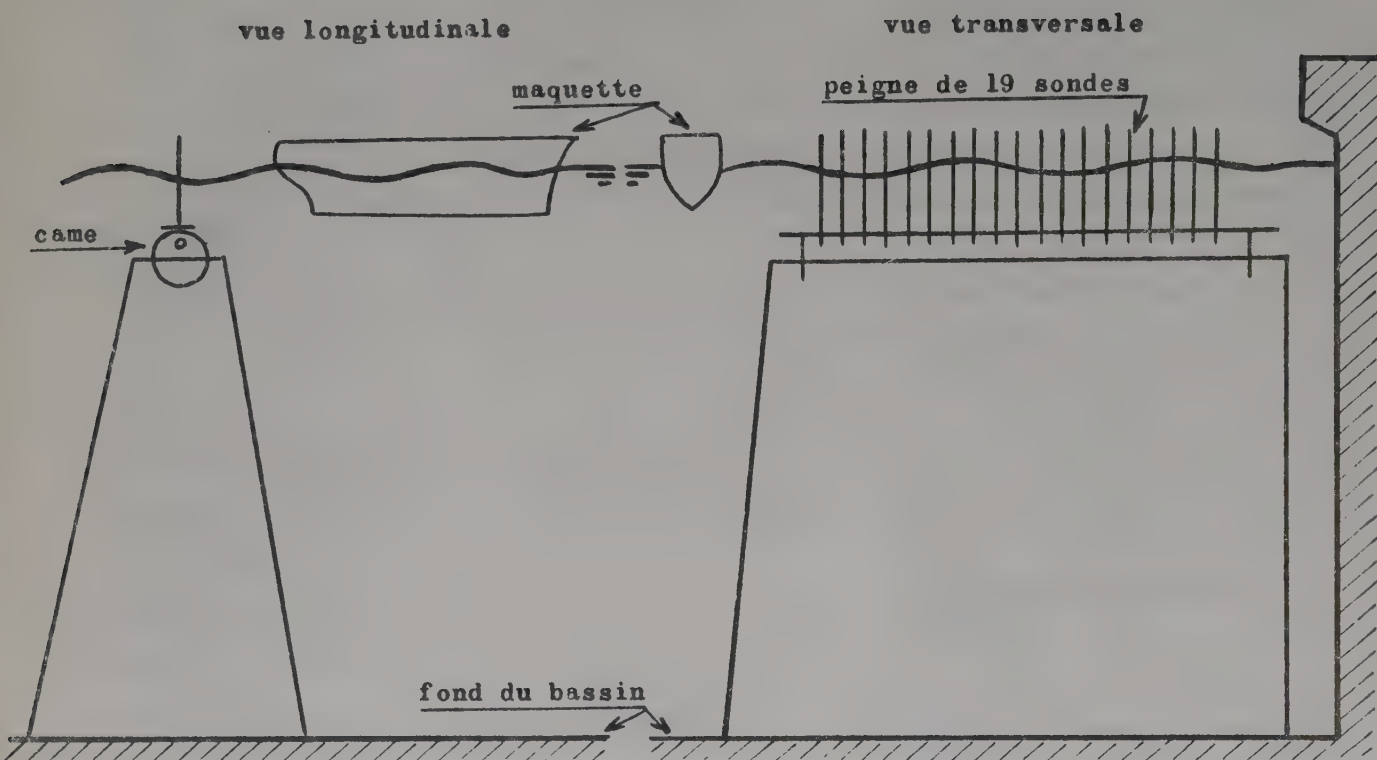
c) EXEMPLE : méthode utilisée au Bassin des Carènes de FELTHAM (Angleterre) [2]

Pour calculer la résistance des bateaux, MM. GAAD et N. HOG BEN relèvent expérimentalement le champ de vagues. Ils utilisent une série de sondes capacitatives, appelée "peigne". Pour un essai de traction, le peigne est monté dans une section transversale du Bassin. Il est fixe.

Les variations de capacité d'une sonde correspondent à une section longitudinale du champ de vagues. Les sondes sont montées sur un support qui permet éventuellement d'étalonner le système. Le peigne comporte 19 sondes distantes de 3 pouces. Les signaux sont envoyés sur un enregistreur ultra-violet à 12 canaux. Pratiquement il est apparu nécessaire de procéder

par groupes de 3, 4 ou 5 sondes et de réaliser plusieurs passages à la même vitesse.

Schéma de montage:



On dispose ici d'une méthode très intéressante pour atteindre la résistance de vagues. Contrairement à beaucoup de méthodes photographiques pour lesquelles la mesure des déplacements est une opération longue et pénible, cette méthode a l'avantage de les exprimer directement sous forme de signaux électriques faciles à enregistrer et à exploiter.

Cependant il n'est pas facile de placer le peigne trop près de la maquette ce qui ne permet pas de préciser le champ de vagues dans une zone voisine assez importante.

Par ailleurs l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle n'est applicable que pour des phénomènes permanents. Il est absolument impossible d'avoir un relevé instantané du champ de vagues.

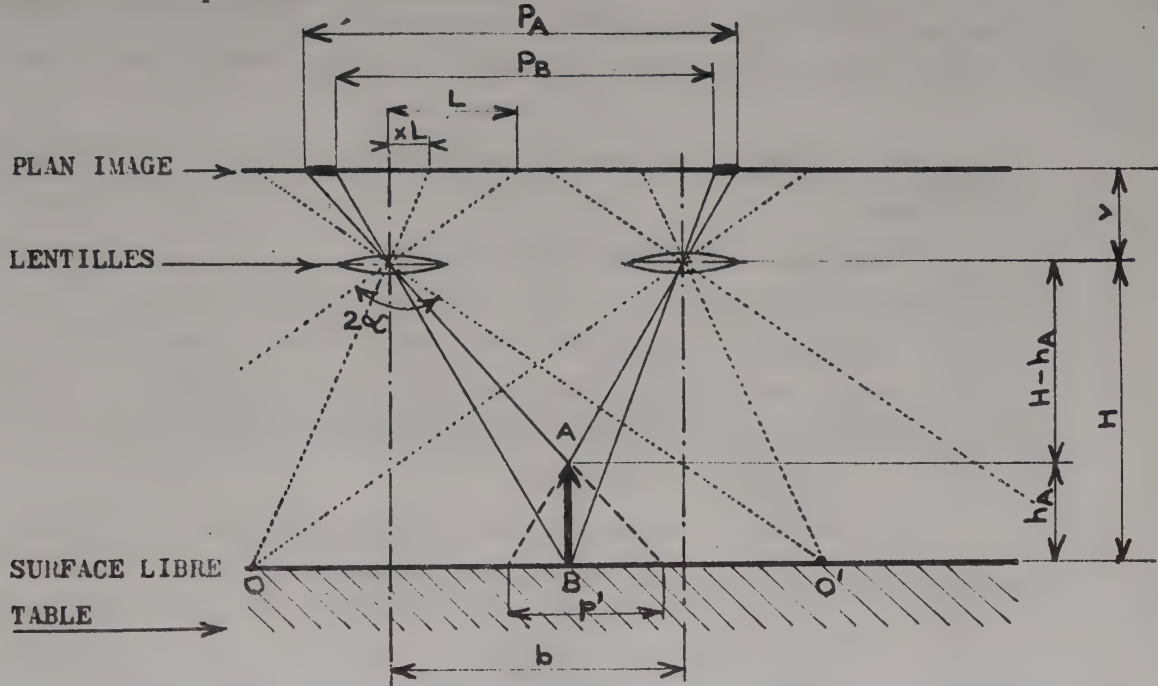
Enfin le prix de revient de chaque sonde et de l'équipement électronique qu'elle entraîne est élevé ce qui oblige à en limiter le nombre.

-STEREOSCOPIE [3]

La stéréoscopie est une technique qui est actuellement couramment utilisée pour l'étude des topographies de terrains. La méthode peut être appliquée en laboratoire, mais elle est d'un prix de revient élevé.

Nous citerons un exemple d'application de la stéréoscopie pour l'étude d'une surface libre déformée dans le cas d'un champ objet limité.

MM. J.W. RAILLY & B.F. SCOTT, à l'Université de Birmingham, ont étudié l'analogie entre l'écoulement superficiel de l'eau sur une plaque horizontale et l'écoulement d'un gaz en régime supersonique. Le schéma de principe de la mesure est représenté ci-dessous.



Soit un plan vertical contenant les deux axes parallèles de deux lentilles. Un point B de la surface libre se déplace en A. Les images de BA dans le plan image sont liées par la quantité $P_A - P_B$. Montrons que $p = P_A - P_B$ permet de calculer la cote h_A d'un point de la surface libre déformée.

$$P_B = b + \frac{v \cdot b}{H}$$

$$P_A = b + \frac{v \cdot b}{H - h_A}$$

d'où :
$$p = v \cdot b \cdot \left(\frac{1}{H - h_A} - \frac{1}{H} \right)$$

$$p = \frac{v \cdot b \cdot h_A}{H - h_A}$$

Il est préférable de remonter les plaques sensibles convenablement traitées et de les projeter sur le plan de la surface libre. Cette projection permet d'éliminer les défauts dûs à la distorsion. Dans ces conditions nous ne mesurons pas $p = P_A - P_B$ dans le plan image mais sa projection dans le plan objet. Le rapport de similitude est H/v . Il vient :

$$p' = \frac{b \cdot h_A}{H - h_A}$$

Le montage expérimental comporte 3 lentilles. La table est transparente et est éclairée par en-dessous à l'aide d'un flash électronique qui donne une lumière diffuse.

La surface de l'eau est repérée grâce à une distribution de "confettis" qui sont en fait des petits disques de papier dont le diamètre est inférieur à 1 mm.

La résolution du problème suppose un choix des valeurs à donner aux variables suivantes:

- (1) : l'importance du champ stéréoscopique.
- (2) : l'angle de visée, 2α , et la distance focale, f .
- (3) : la distance des axes des lentilles, b , et la hauteur, H .
- (4) : le degré de recouvrement des champs des lentilles, x .

Le champ stéréoscopique a pour dimensions approximatives :

$$. H.(1+x).tg \alpha \text{ suivant } 00'$$

$$\text{et } . 2.H.tg \alpha \text{ suivant une direction normale.}$$

En différenciant l'expression de p' , il vient :

$$\frac{\partial p'}{\partial h_A} = \frac{b}{H} \left(1 - \frac{h_A}{H} \right)^{-2}$$

et en négligeant les termes en h_A/H devant l'unité:

$$\frac{\partial p'}{\partial h_A} = \frac{b}{H}$$

$$\text{Or : } tg \alpha = \frac{b}{(1-x)H}$$

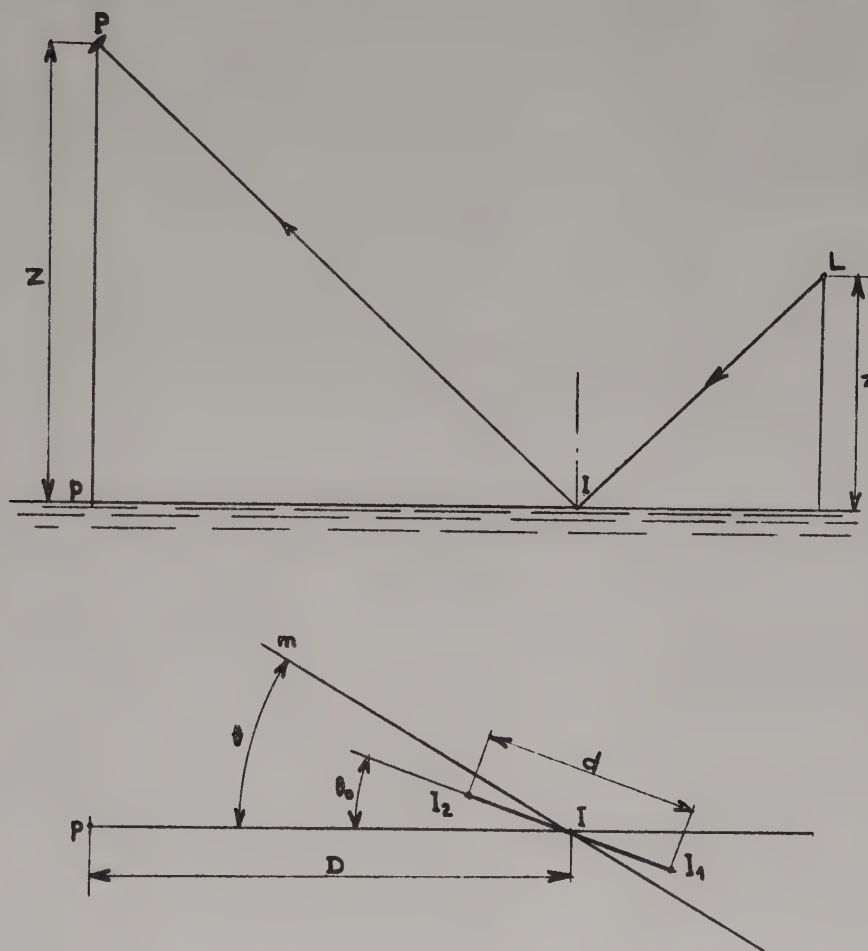
$$\text{d'où : } \frac{\partial p'}{\partial h_A} = (1-x)tg \alpha$$

$\frac{\partial p'}{\partial h_A}$ représente la sensibilité du système. x étant choisi la sensibilité dépend de l'angle de visée.

Il n'entre pas dans notre propos d'exposer plus en détails cette méthode. Signalons que le champ objet est d'environ 5,1 pouces pour les valeurs suivantes des paramètres: $H = 9$, $b = 3,6$, $v = 0,8$ et $f = 1,38$ pouces. La précision sur la cote h est de 0,005 pouce.

L'exposé des différentes techniques de relevé des déformations de surface libre serait incomplet si nous ne signalions pas les travaux de MM. BARILLON et VALEMBOIS [4]. La méthode utilisée est connue sous le nom de "ciel étoilé".

Elle n'est plus employée actuellement. C'était d'ailleurs une méthode essentiellement qualitative.



Considérons une surface libre au repos, un point lumineux L à la cote z et un appareil photographique P à la cote Z . Soit I l'image du point L vu de P et D la distance du point I à la projection p du point P sur la surface libre.

Supposons que la pente du plan tangent en I au liquide varie de $+\alpha$ à $-\alpha$, la ligne de pente étant Im.

Sur le cliché nous mesurons $I_1 I_2 = d$ ainsi que l'angle que fait $I_1 I_2$ avec pl .

Un calcul simple montre que l'on peut déduire les valeurs de θ et α ,

de θ_0 et d , à partir des relations :

$$\theta = f\left(\theta_0, \frac{D}{Z}\right)$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{Z}{z}\right) \frac{d}{4Z} \cdot k\left(\theta_0, \frac{D}{Z}\right)$$

avec les conditions suivantes :

$$\theta = 0, \theta_0 = 0 \quad \alpha = \left(1 + \frac{Z}{z}\right) \cdot \frac{d}{4Z} \cdot \left(1 + \frac{D^2}{Z^2}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \left(1 + \frac{Z}{z}\right) \cdot \frac{d}{4Z}$$

Cette méthode a été utilisée, en particulier, à CHATOU pour l'étude de maquettes portuaires.

- P R E M I E R E P A R T I E -

CHAPITRE I

EXPOSE DE LA METHODE EXPERIMENTALE

DETERMINATION EXPERIMENTALE
DE LA TOPOGRAPHIE
D'UNE SURFACE LIBRE

1.1 - PRINCIPE

Nous immergeons une mire plane quadrillée de 3m X 1,50m ,à environ 0,60m de la surface libre. Cette mire noire comporte un quadrillage blanc dont le pas est de 10 ou 5 cm .

Nous prenons un cliché, l'appareil étant situé au-dessus de la surface libre, à 2,50m .

Par application des propriétés de la réfraction, le quadrillage de la mire permet de visualiser les déformations de la surface libre perturbée par exemple par le passage d'une maquette de navire.

METHODE DE CALCUL

Soit un point A du plan de la mire que nous supposons être l'intersection d'une ligne et d'une colonne du quadrillage. Un rayon lumineux issu de A frappe la surface libre au repos en un point M, et après réfraction prend la direction MO_2 . L'image virtuelle E de A est sur le prolongement du rayon réfracté. Ce rayon rencontre le plan de la mire en un point I .

Si la surface est perturbée le point M vient en M' et la nouvelle image du point A est en E'.

Nous supposons que les amplitudes verticales des déformations sont assez faibles par rapport à la profondeur d'immersion. Par ailleurs nous pouvons admettre avec une bonne approximation que l'image du plan de la mire, dans les conditions expérimentales utilisées, peut être considérée comme étant un plan parallèle au plan de la mire.

Un élément plan ABCD de la mire donne, dans ces conditions, respectivement les images EFGH et E'F'G'H' quand la surface libre est au repos ou déformée.

Soit $\vec{n}$ la normale en M à la surface libre au repos et $\vec{n'}$ la normale

(suite page 13)

SCHEMA GENERAL

O_2 : centre optique

$O_2 O_1$: distance du centre optique au plan de surface libre au repos.

$O_1 O$: profondeur d'immersion de la mire.

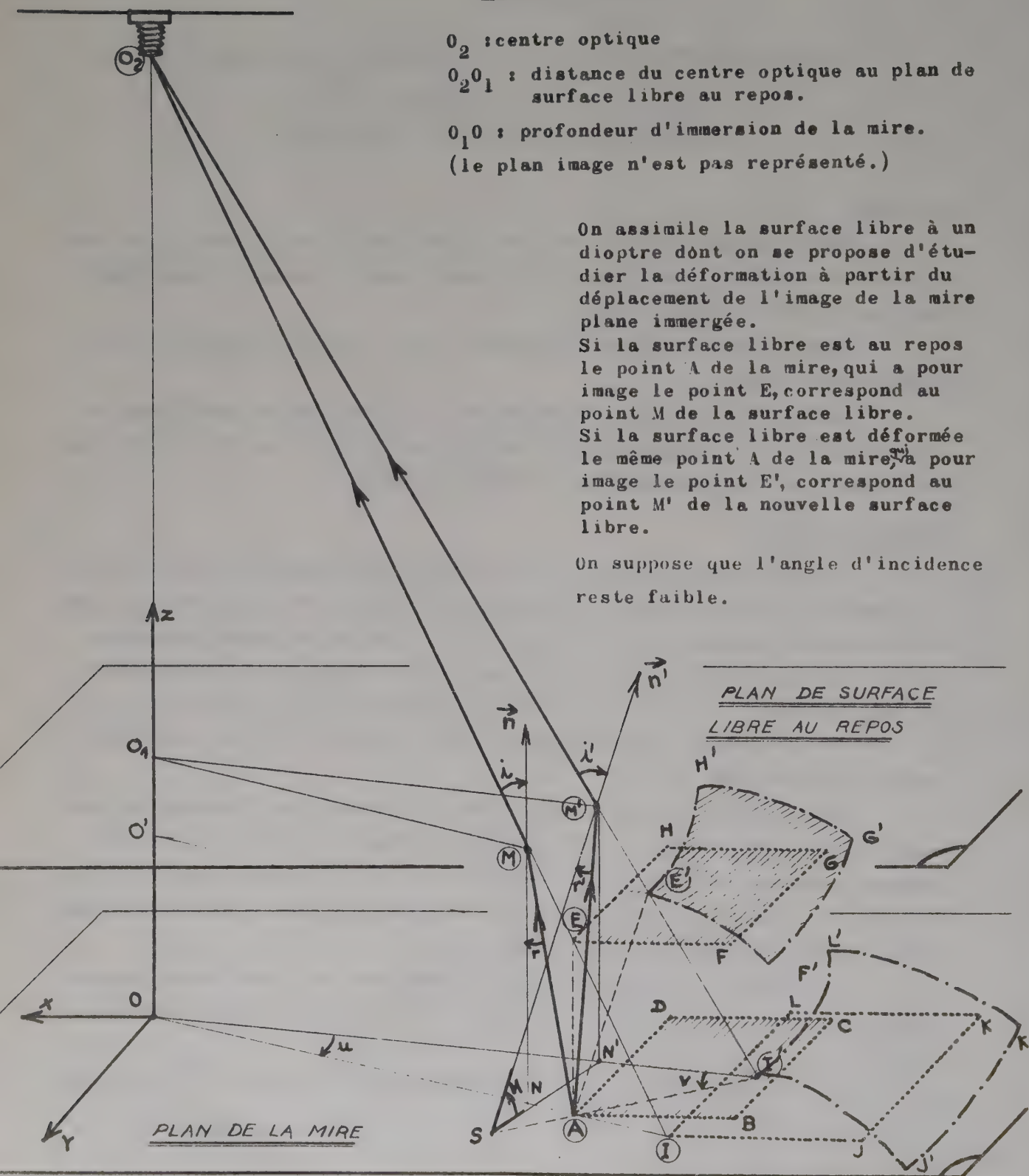
(le plan image n'est pas représenté.)

On assimile la surface libre à un dioptré dont on se propose d'étudier la déformation à partir du déplacement de l'image de la mire plane immergée.

Si la surface libre est au repos le point A de la mire, qui a pour image le point E, correspond au point M de la surface libre.

Si la surface libre est déformée le même point A de la mire, a pour image le point E', correspond au point M' de la nouvelle surface libre.

On suppose que l'angle d'incidence reste faible.



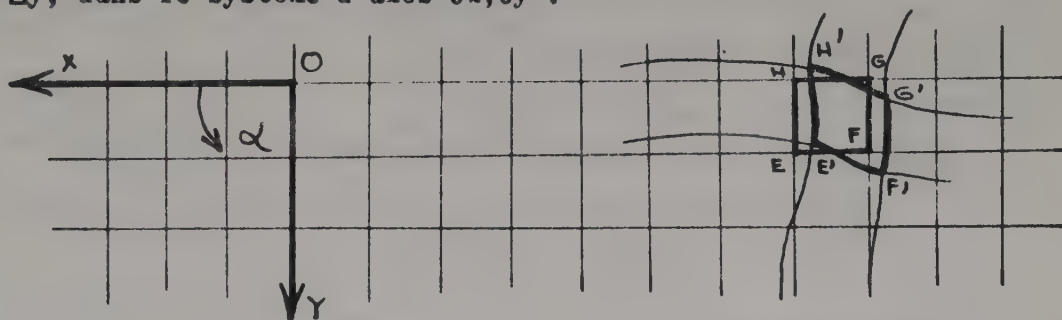
en M' à la surface libre perturbée. $\vec{n'}$ perce le plan de la mire en S . Nous appellerons α l'angle de cette normale avec la droite qui joint S à la projection de M' sur le plan de la mire.

Le centre optique O_2 se projette en O_1 sur le plan de surface libre et en O sur le plan de la mire.

Par homothétie nous ramenons les éléments EFGH et E'F'G'H' dans le plan de la mire suivant IJKL et I'J'K'L'.

Sur le cliché nous trouvons les éléments EFGH et E'F'G'H' ainsi que le point O_1 .

En coordonnées cartésiennes le déplacement du point E est défini par Δx et Δy , dans le système d'axes Ox, Oy .



Montrons qu'à partir des seules valeurs mesurées Δx et Δy il est possible d'exprimer l'angle α de la normale à la surface libre pour un point donné de la mire.

Le rayon AM fait l'angle r avec la normale $\vec{n}$ et le rayon MO_2 l'angle i .

Nous appellerons u l'angle $(O I', OI)$, v l'angle $(I'O, I'S)$, N et N' les projections respectives des points M et M' sur le plan de la mire.

Pour une série d'expériences nous avons les constantes suivantes:

- n : indice de l'eau
- h : profondeur d'immersion de la mire
- d : distance du centre optique au plan de la surface libre.

Détermination de $\tan \alpha$

Dans le triangle $SM'N'$ nous pouvons exprimer $\tan \alpha$:

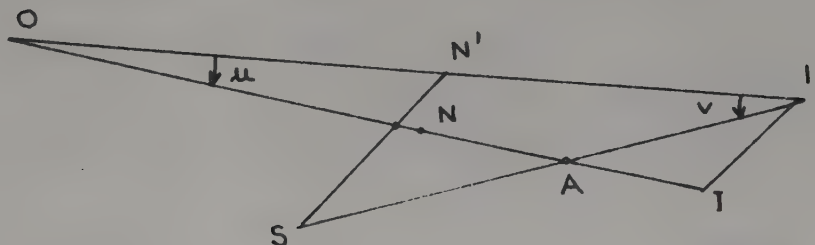
$$(1) \quad \tan \alpha = \frac{N'M'}{N'S} = \frac{h}{N'S} \quad \text{en supposant que le déplacement vertical du point } M \text{ est négligeable.}$$

$$\text{Dans le triangle } SN'I' : SN'^2 = I'N'^2 + I'S^2 - 2 \cdot I'N' \cdot I'S \cdot \cos v \quad (2)$$

Il faut donc calculer $I'N'$, $I'S$ et $\cos v$.

Dans le triangle $OI'A$: $\frac{AI'}{\sin u} = \frac{OA}{\sin v}$

d'où (3) $\sin v = \frac{OA}{AI'} \sin u$



Dans le triangle rectangle MNA nous avons : $NA = MN \cdot \operatorname{tg} r = h \cdot \operatorname{tg} r$
 et dans le triangle rectangle O_2O_1M : $O_1M = O_2O_1 \cdot \operatorname{tg} i = d \cdot \operatorname{tg} i$
 d'où OA (4) $OA = d \cdot \operatorname{tg} i + h \cdot \operatorname{tg} r$

Exprimons $\operatorname{tg} r$ à partir de la loi générale de la réfraction :

$$\sin i = n \cdot \sin r$$

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin i}{[n^2 - \sin^2 i]^{0,5}}$$

et en transformant cette relation en fonction de $\operatorname{tg} i = \frac{OI}{OO_2} = \frac{OI}{h + d}$

$$(5) \quad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{OI^2}{OI^2(n^2 - 1) + n^2(h + d)^2}}$$

$$\text{d'où (4)} \rightarrow (4') \quad OA = \frac{d}{h + d} OI + h \cdot \sqrt{\frac{OI^2}{OI^2(n^2 - 1) + n^2(h + d)^2}}$$

Exprimons $\cos u$ dans le triangle OII' :

$$(6) \quad \cos u = \frac{OI^2 + OI'^2 - II'^2}{2 \cdot OI \cdot OI'}$$

et dans le triangle OAI' :

$$(7) \quad AI'^2 = OA^2 + OI'^2 - 2 \cdot OA \cdot OI' \cdot \cos u$$

Remarque: Si sur le cliché nous trouvons les points O', E et E' , donc si nous mesurons les distances $O'E, O'E', EE'$, nous obtiendrons par un rapport d'homothétie simple les distances OI, OI', II' , etc...

En reprenant l'expression (3), il vient:

$$\begin{aligned} \sin^2 v &= \frac{OA^2}{AI'^2} \sin^2 u = \frac{OA^2}{AI'^2} (1 - \cos^2 u) \\ (8) \quad \cos^2 v &= 1 - \sin^2 v = 1 - \frac{OA^2 (1 - \cos^2 u)}{AI'^2} \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer $\cos v$, OA est obtenu par (4) et $\cos u$ et AI' par (6) et (7).

Pour calculer SN' par la relation (2) il faut encore déterminer les valeurs de $I'N'$ et $I'S$.

Détermination de $I'N'$

$I'N'$ est peu différent de NI . Dans le triangle MNI nous avons: $NI = h.TG i$
(8 bis)

Détermination de $I'S$

En appelant w l'angle (SM', SI') nous obtenons les relations suivantes dans les triangles $SI'M'$ et SAM' :

$$\frac{M'I'}{\sin w} = \frac{SI'}{\sin i'} \quad \text{et} \quad \frac{AM'}{\sin w} = \frac{SA}{\sin r'}$$

d'où l'on tire la valeur de SI' en tenant compte de la relation: $\frac{\sin i'}{\sin r'} = n$

$$(9) \quad SI' = \frac{M'I' \cdot SA \cdot n}{AM'}$$

mais $SA = SI' - AI'$

$$(9') \quad SI' = \frac{M'I' \cdot AI'}{M'I' - AM' / n}$$

Calculons $M'I'$ dans les triangles semblables O_2O_1M' et O_2OI'

$$\frac{O_2O}{O_2I'} = \frac{O_1O}{M'I'}$$

$$(10) \quad M'I' = \frac{h}{h+d} \cdot O_2I'$$

Dans le triangle $O_2I'O$:

$$O_2I'^2 = OO_2^2 + OI'^2 \quad \text{avec} \quad OO_2 = h + d$$

$$(10') \quad M'I' = \frac{h}{h+d} \cdot \sqrt{(h+d)^2 + OI'^2}$$

Enfin il faut calculer AM' . AM' est peu différent de AM qui est déterminé dans le triangle rectangle AMN .

$$AM^2 = AN^2 + NM^2 = h^2 \cdot \tan^2 r + h^2$$

$$(11) \quad AM^2 = h^2(1 + \tan^2 r)$$

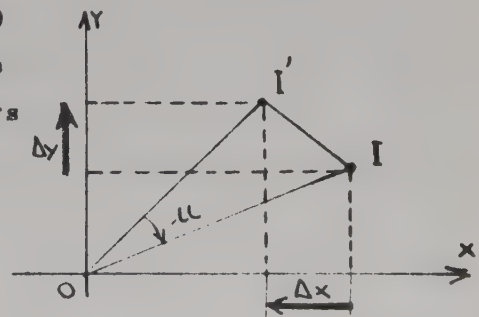
Nous avons alors la valeur de SI' par la relation (9')

En résumé il est possible d'obtenir $\tan \alpha$ par la relation (1) à partir des seules valeurs de OI et OI' . En effet si dans la relation (6) en particulier nous trouvons II' , ce segment n'est pas indépendant de OI et OI' .

Pratiquement nous nous donnerons le point O et des points I de la mire. Nous mesurerons les déplacements Δx et Δy . Nous aurons alors

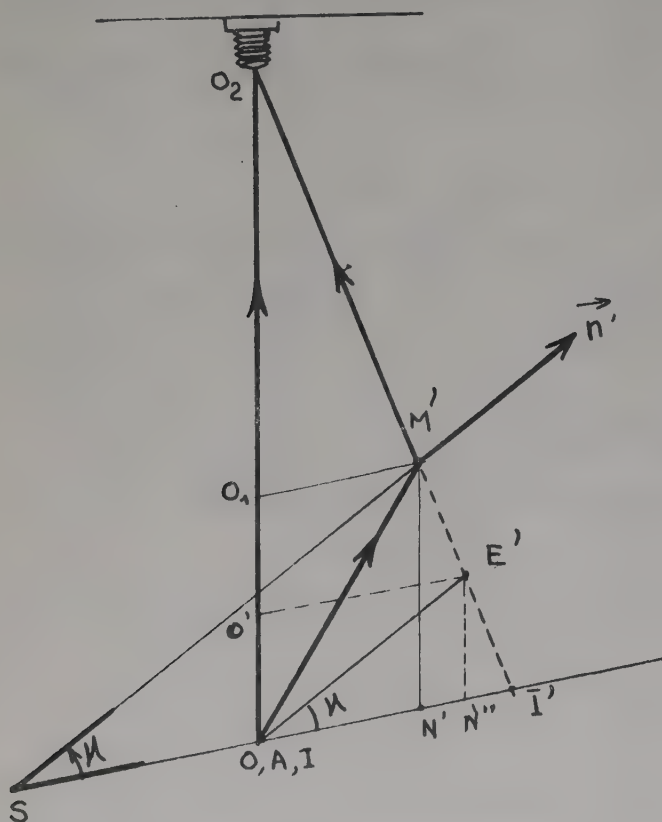
$$OI' = \sqrt{(OI_x + x)^2 + (OI_y + y)^2}$$

(11 bis)



CAS PARTICULIER : point 0

Pour ce point il n'est pas nécessaire d'effectuer tous les calculs précédents. Nous trouvons sur la figure ci-dessous le schéma simplifié du cheminement des rayons lumineux.



Dans le triangle $IE'N''$ nous pouvons exprimer $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E'N''}{ON''}$$

Compte tenu du rapprochement dû au dioptré nous pouvons écrire :

$$E'N'' = h - \frac{h}{n} = h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Dans les triangles semblables

$O_2O'E'$ et O_2II' :

$$\frac{O'E'}{II'} = \frac{O_2O'}{O_2I'}$$

d'où :

$$O'E' = \frac{O_2O'}{O_2I'} \cdot II'$$

$$O'E' = \frac{d + \frac{h}{n}}{h + d} \cdot II'$$

$$IN'' = O'E'$$

d'où $\operatorname{tg} \alpha$:

$$(1') \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h(n-1)(h+d)}{nd+h} \cdot \frac{1}{II'}$$

Détermination de l'angle des tangentes

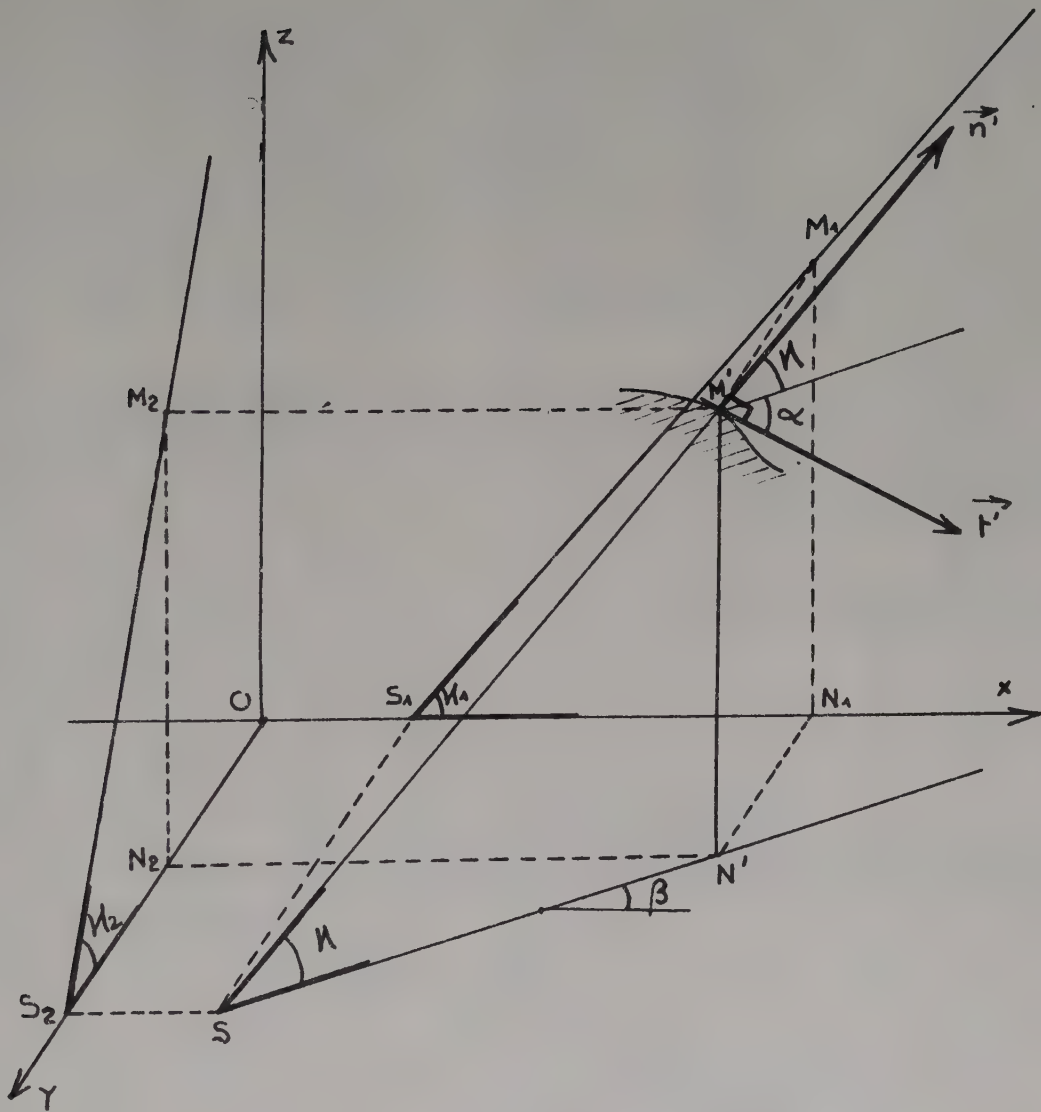
Si la normale en un point de la surface libre fait l'angle α , l'angle de la tangente α sera tel qu'il vérifiera la relation :

$$(12) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Projection des angles sur deux plans perpendiculaires

Le plan vertical contenant la normale $\vec{n}$ a pour trace SI' sur le plan de la mire. Dans le système de coordonnées cartésiennes, que nous avons défini plus haut, nous appellerons β l'angle de cette trace avec Ox .

Projetons la normale $\vec{n}$ sur le plan vertical passant par Ox (plan longitudinal) et sur le plan vertical passant par Oy (plan transversal).



- Projetons n' sur le plan longitudinal:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{M_1 N_1}{S_1 N_1} = \frac{M' N'}{S N' \cos \beta} \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos \beta} \end{aligned}$$

et d'après (12) :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta} \quad (12')$$

- Projetons n' sur le plan transversal:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\sin \beta}$$

et d'après (12) :

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta} \quad (12'')$$

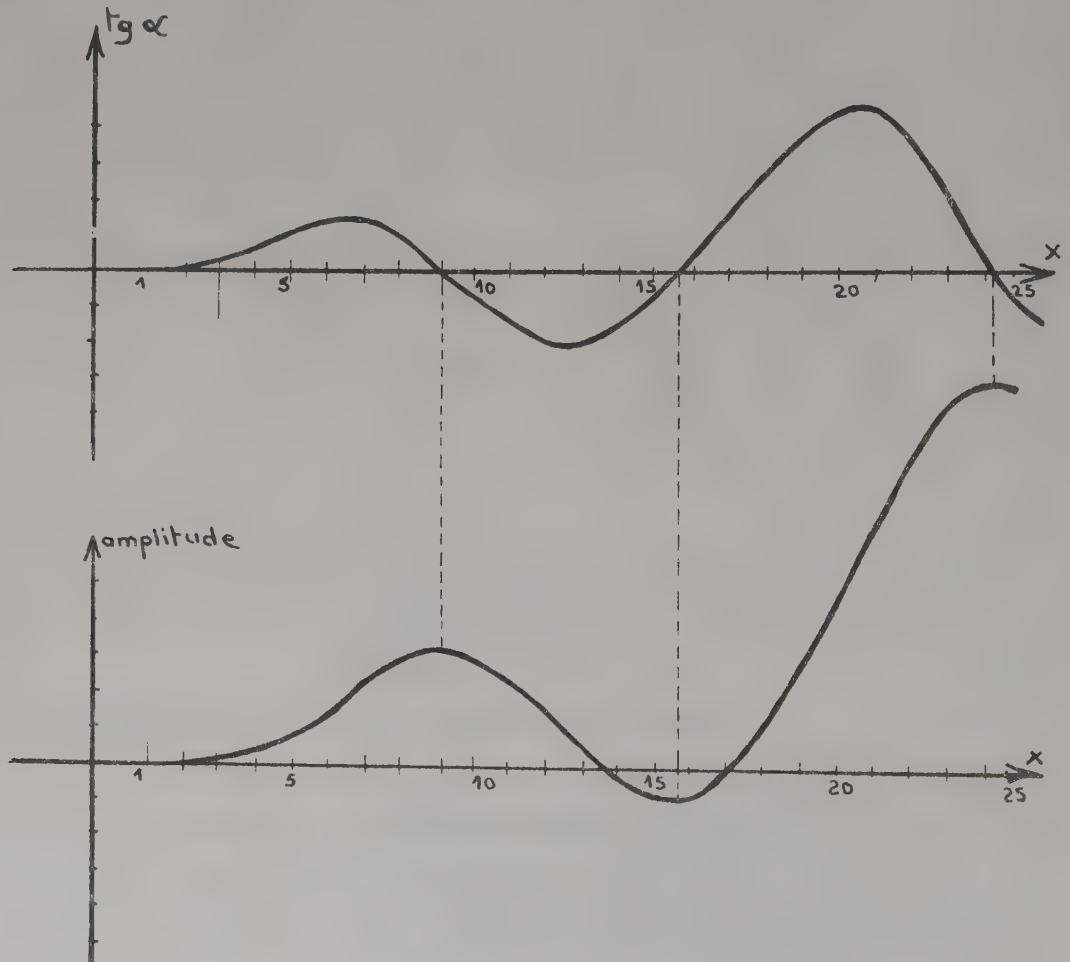
Topographie

Nous venons de projeter l'angle de la normale n et l'angle de la tangente α pour un point de la surface libre sur deux plans rectangulaires. Pour tous les points de la surface libre nous obtenons deux réseaux de points:

- un réseau des tangentes α_1 (sur plan longitudinal)
- un réseau des tangentes α_2 (sur plan transversal).

Dans une première étape nous intégrons ces deux réseaux de courbes. Nous obtenons ainsi les PROFILS de la surface libre. Notons ici qu'un seul réseau suffirait, mais le deuxième nous permet de rectifier d'éventuelles erreurs expérimentales.

A partir des profils de la surface libre il nous suffit maintenant de couper le réseau par des plans horizontaux de cote donnée. Nous avons alors la TOPOGRAPHIE INSTANTANÉE .



Remarque

Au début de l'exposé de cette méthode nous avons supposé que l'ima-

RESUME DES CALCULS

Pratiquement nous connaissons le point o' , projection du centre optique sur le plan image. Tout point E choisi se trouve sur la i° ligne et sur la j° colonne du quadrillage de la mire. Il est donc possible de calculer la distance $O'E$. Le déplacement EE' du point E est mesuré par Δx et Δy . Nous obtenons alors la distance $O'E'$. Par des relations analogues à la relation (13) nous en déduisons OI, OI' et II' .

Nous calculons les constantes : n^2 , $(n^2 - 1)$, $(h + d)^2$, $n^2(h + d)^2$,

$$\frac{d}{h + d}, \quad \frac{h}{h + d}.$$

Nous calculons ensuite, dans l'ordre :

$$(5) \quad \text{tg } r = \left[\frac{OI^2}{OI^2(n^2 - 1) + n^2(h + d)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(4') \quad OA = \frac{d}{h + d} OI + h \cdot \text{tg } r$$

$$(6) \quad \cos u = \frac{OI^2 + OI'^2 - II'^2}{2 \cdot OI \cdot OI'}$$

$$(7) \quad AI'^2 = OA^2 + OI'^2 - 2 \cdot OA \cdot OI' \cdot \cos u$$

$$(8) \quad \cos^2 v = 1 - \frac{OA^2(1 - \cos^2 u)}{AI'^2}$$

$$(10') \quad M'I' = \frac{h}{h + d} \cdot \sqrt{(h + d)^2 + OI'^2}$$

$$(11) \quad AM'^2 = h^2(1 + \text{tg}^2 r)$$

$$(9') \quad SI' = \frac{M'I' \cdot AI'}{M'I' - \frac{AM'}{n}}$$

$$(8 \text{ bis}) \quad I'N' = h \cdot \text{tg } i = \frac{h}{h + d} OI$$

$$(2) \quad SN'^2 = I'N'^2 + I'S^2 - 2 \cdot I'N' \cdot I'S \cdot \cos v$$

$$(1) \quad \text{tg } \kappa = \frac{h}{SN'}$$

$$(12) \quad \text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \kappa}$$

et enfin en projection sur deux plans rectangulaires:

$$(12') \quad \text{tg } \kappa_1 = \text{tg } \kappa \cdot \cos \beta$$

$$(12'') \quad \text{tg } \kappa_2 = \text{tg } \kappa \cdot \sin \beta$$

$$\text{avec } \sin \beta = \frac{\Delta y}{EE'} \quad \text{et} \quad \cos \beta = \frac{\Delta x}{EE'}$$

$$EE' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

REMARQUE :

Pour tous les points de la plage de la mire topographique - c'est-à-dire pour tous les points voisins du point 0, projection du centre optique sur la mire - l'angle d'incidence est faible. Posons que le rayon incident est normal à la surface libre, ce qui suppose que le centre optique est situé à l'infini au-dessus de la surface libre. Le schéma des calculs de la page précédente est très simplifié:

$$\operatorname{tg} i = 0$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} r = 0$$

$$(4') \quad OI = OI'$$

$$(6) \quad \cos u = \frac{OI^2 + OI'^2 - II'^2}{2 \cdot OI \cdot OI'}$$

$$(7) \quad AI' = II'$$

$$(8) \quad \cos^2 v = 1 - \frac{OI^2 (1 - \cos^2 u)}{II'^2}$$

$$(10') \quad M'I' = h$$

$$(11) \quad AM'^2 = h^2$$

$$(9') \quad SI' = II' \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$(8 \text{ bis}) \quad I'N' = 0$$

$$(2) \quad SN'^2 = SI'^2$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{SN'} = \frac{h}{II'} \cdot \frac{n-1}{n}$$

A partir de la mesure du déplacement II' nous avons immédiatement la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$. Ceci est un résultat intéressant. Il était d'ailleurs aisé d'établir directement la relation (1).

1.2 - METHODE DE PREMIERE APPROXIMATION

Nous supposons toujours qu'il n'y a pas de déplacement vertical du point M et que la normale en M' tourne d'un angle i .

Dans le triangle $SM'I$:

$$(1) \quad \frac{SI}{\sin r'} = \frac{IM'}{\sin \alpha}$$

Dans le triangle $SM'I'$:

$$(2) \quad \frac{SI'}{\sin i'} = \frac{I'I'}{\sin \alpha}$$

Par ailleurs : $SI' = SI + II'$

d'où :

$$SI' = \frac{II' \cdot n \cdot h}{n \cdot h - \sqrt{h^2 + II'^2}}$$

L'angle α est donné dans le triangle $SM'I'$ par : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{SI'}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \cdot h - \sqrt{h^2 + II'^2}}{n \cdot II'}$$

II' , projection de MM' , est toujours faible devant h :

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{n \cdot h - h}{n \cdot II'}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{II'}$$

Nous retrouvons la relation précédente (1) .

En particulier, l'indice de l'eau $n = 4/3$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{II'}$$

PRECISION DE LA METHODE :

Pour une ligne de la mire topographique, supposons une déformation identique pour tous les points.

Conditions expérimentales :

- Distance du centre optique au plan d'eau : $d = 220$ cm
- Profondeur d'immersion de la mire : $h = 60$ cm
- Projection du centre optique sur la mire :
 - . ligne n° 12
 - . colonne n° 16
- Déplacement constant de chaque point : 5 mm (à l'échelle d'un cliché) - $\Delta x = 5$, $\Delta y = 0$.

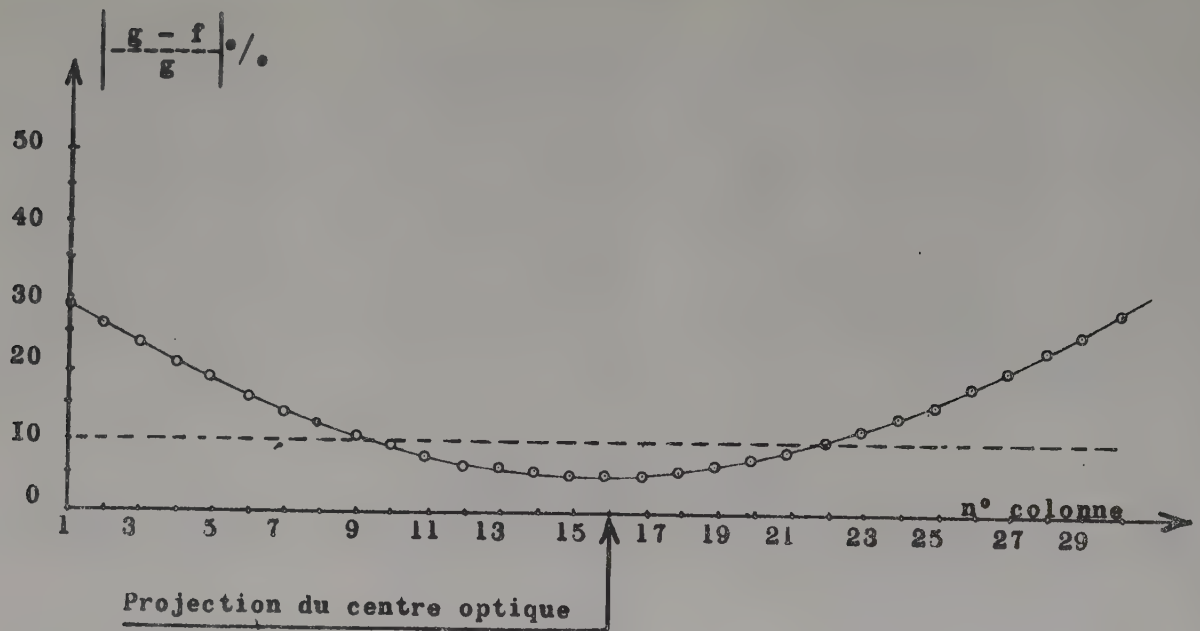
Soit f la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$ donnée par la méthode de première approximation et g la valeur calculée par la méthode complète.

Etudions les valeurs de :

$\frac{g-f}{g}$, exprimées en % , pour tous les points de la douzième ligne. (voir graphique)

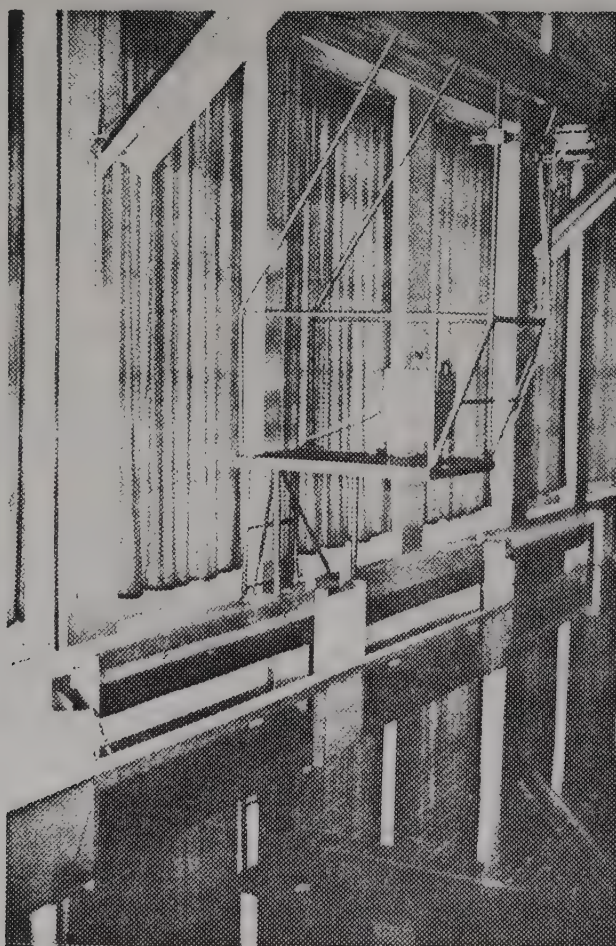
Du graphique nous pouvons affirmer que les écarts sont inférieurs à 10 % , dans un rayon de 0,60 m autour de la projection du centre optique.

Représentation graphique des écarts



INSTALLATION GENERALE

Nous pouvons voir nettement sur cette photographie la plateforme d'observation qui surplombe le Bassin. En haut de la plateforme nous trouvons l'appareil photographique . Enfin nous apercevons la mire immergée.



1.3-MISE EN OEUVRE DE LA METHODE PROGRAMMATION

Nous venons de voir que chaque point nécessite un calcul très long. Le dépouillement complet d'un cliché exige souvent 1500 points. Il n'était donc pas question d'envisager l'exploitation de notre méthode en conduisant les calculs manuellement. Nous avons eu la chance de trouver à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique un Centre de Calcul Scientifique équipé d'un Ordinateur I.B.M. de type 650 Standard. Nous donnons dans cette partie les grandes lignes du PROGRAMME que nous avons rédigé.

POSITION DU PROBLEME

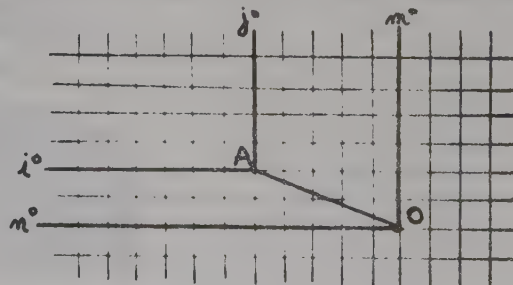
Nous nous proposons de calculer $\text{tg } \alpha_1$ et $\text{tg } \alpha_2$. Pour chaque point A de la mire nous avons 3 paramètres :

- sa distance AO à la projection du centre optique sur la mire
- son déplacement rapporté à 2 axes : Δx et Δy .

Toutes les mesures à partir du cliché sont longues. Le quadrillage de la mire étant à pas constant il nous a semblé intéressant de calculer directement en Ordinateur la distance OA.

Supposons que le point A soit à l'intersection de la i° ligne et de la j° colonne et que le point O soit à l'intersection de la n° ligne et de la m° colonne; appelons en outre P le pas du quadrillage. Nous avons immédiatement :

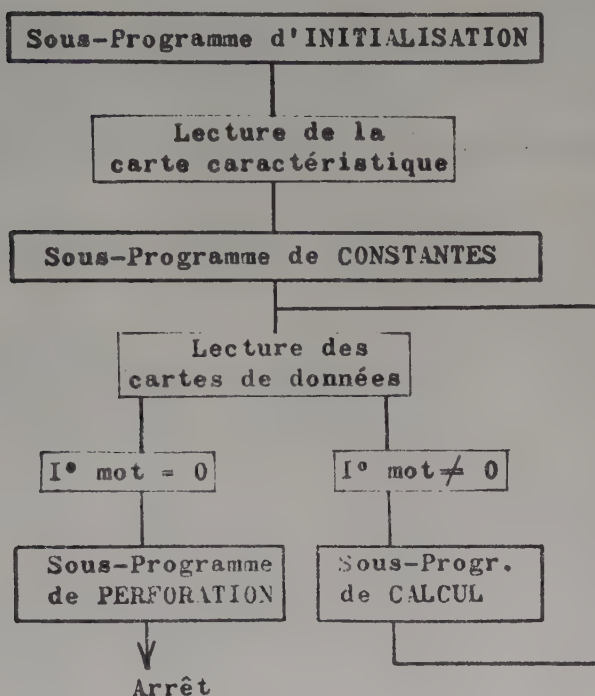
$$OA = \sqrt{(n - i)^2 + (m - j)^2} \cdot P$$



Pour chaque point nous n'avons plus alors que 2 paramètres : Δx et Δy . Pour faire le calcul complet de $\text{tg } \alpha_1$ et $\text{tg } \alpha_2$ il suffira de donner les valeurs de Δx et Δy , après avoir indiqué les coordonnées du point choisi.

PROGRAMMATION

L'Ordinateur du Centre de Calcul n'ayant pour mémoire qu'un tambour



magnétique il est nécessaire, pour l'exploiter rationnellement, d'utiliser la méthode d'assemblage connue sous le nom de PASO (Programme d'Assemblage Symbolique Optimum) [5]

On trouvera ci-contre l'organigramme de notre problème.

On distingue les différentes parties :

- sous-programme d'initialisation

il s'agit essentiellement de remettre "à zéro" un certain nombre de mémoires qui recevront les résultats au cours des calculs.

- lecture de la carte caractéristique : cette carte de type "8 mots" donne toutes les constantes du système :

Mot 1	Mot 2	Mot 3	Mot 4	Mot 5	Mot 6	Mot 7	Mot 8
n	d	h	Echel.	n° ligne CENTRE	n° colonne OPTIQUE	0	test

- sous-programme de constantes : enrégistrement des valeurs données par la carte caractéristique et calcul des constantes dérivées.

Mot 1	Mot 2	Mot 3	Mot 4	Mot 5	Mot 6	Mot 7	Mot 8
i, j, k	Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3	0

- lecture des cartes de données : cette carte est aussi du type "8 mots". Chaque point imposant 2 paramètres et un mot étant réservé au repérage, il est possible de placer 3 points sur chaque carte.

. analyse du 1° mot : c'est le mot qui contient le repérage des

3 points .Nous prendrons toujours des points consécutifs d'une même ligne. Soit un point A situé sur la i° ligne et sur la j° colonne ; nous indiquerons : $i \ 00 \ j$, i et j étant toujours des nombres tels que :

$$\begin{array}{ccc} 0 & i & 14 \\ 0 & j & 31 \end{array}$$

et pour préciser le nombre de points nous ajoutons le repère k , $k = 1, 2$ ou 3 .

En résumé le mot 1 aura la structure suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} i & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & k \\ \hline . & . & . & . & . & . & . & + \end{array}$$

- sous-programme de calcul : c'est la partie la plus longue du programme . Tous les calculs seront faits en Virgule Flottante du type FLAIR, en Simple Précision. Nous avons utilisé certains sous-programme du Centre de Calcul (en particulier la BBL2 qui permet de calculer des racines carrées)
- sous-programme de perforation : tous les résultats seront sortis globalement, la perforation se faisant en 7 mots par carte. Nous avons d'ailleurs repris un sous-programme de perforation de zone du Centre de Calcul en modifiant, en particulier, le 1° mot.

Une carte de résultats aura l'aspect suivant :

Mot 1	Mot 2	Mot 3	Mot 4	Mot 5	Mot 6	Mot 7	Mot 8
i, j, k	$\text{tg } \alpha_1$ (i, j)	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+1)$	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+2)$	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+3)$	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+4)$	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+5)$	$\text{tg } \alpha_1$ $(i, j+6)$

Le 1° mot à la même structure que dans une carte de données, le repère k étant remplacé par un chiffre donnant le nombre de calculs contenus dans la carte . Nous sortons séparément les valeurs de $\text{tg } \alpha_1$ et de $\text{tg } \alpha_2$. Pour distinguer les deux séries de valeurs, les $\text{tg } \alpha_2$ seront affectées du signe moins. Une même carte peut contenir des résultats relatifs à 2 lignes.

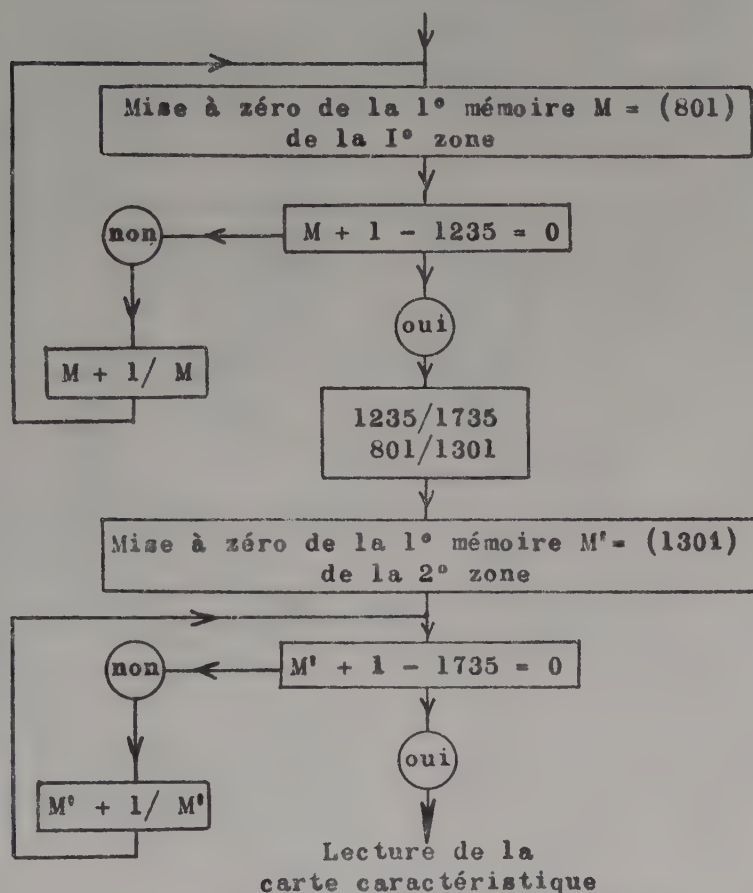
Dans ce cas le 1° point sera sur la j° colonne,

$$" \ 2^{\circ} \ " \ " \ " \ " \ j + 1^{\circ} \ " ,$$

$$" \ 3^{\circ} \ " \ " \ " \ " \ j + 2^{\circ} \ " \text{ avec } j + n \leq 31$$

Pour $j + n > 31$ les points seront sur la $i + 1^{\circ}$ ligne et sur les $1, 2, \dots$ colonnes .

- SOUS-PROGRAMME D'INITIALISATION -



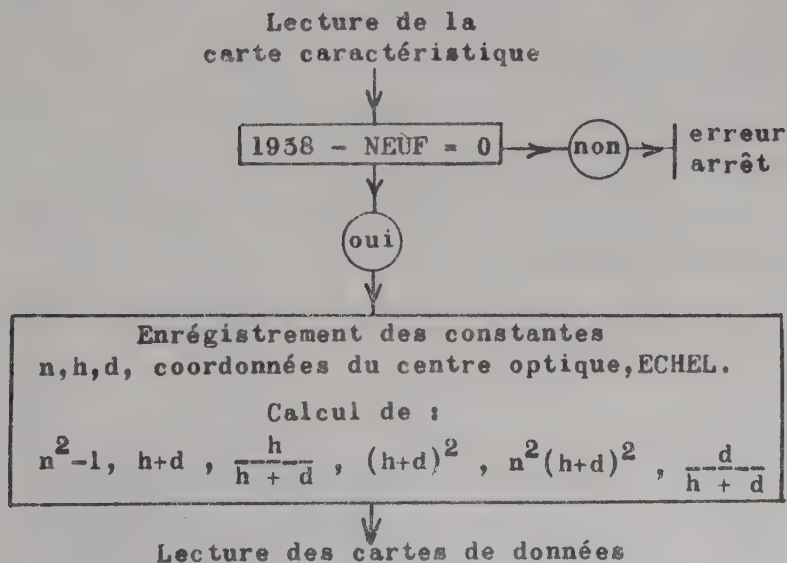
La mire comportant 14 lignes et 31 colonnes, nous disposons de 434 points.

Dans ce sous-programme nous réservons 2 zones du tambour magnétique:

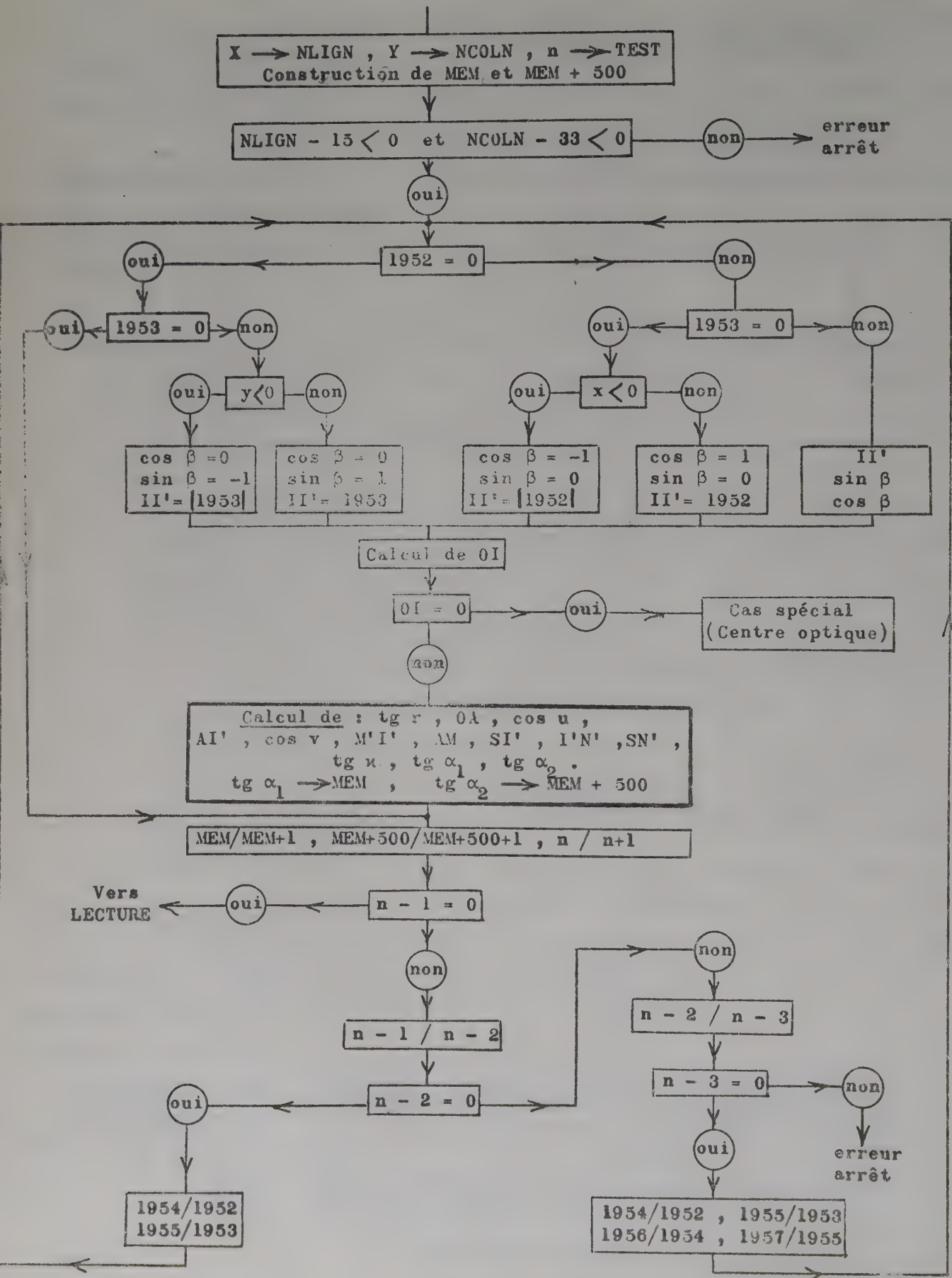
- de 0801 à 1234 pour les $\text{tg } \alpha_1$
- de 1301 à 1734 pour les $\text{tg } \alpha_2$.

Ces mémoires seront mises "à zéro".

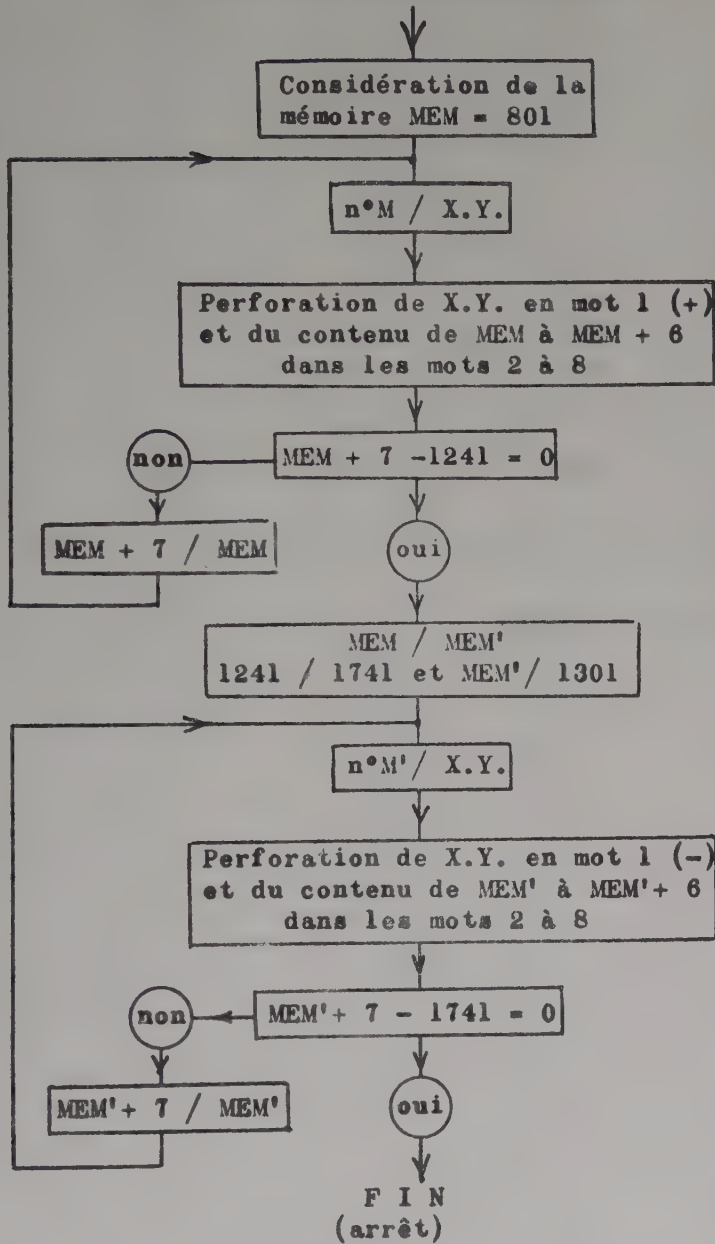
- SOUS-PROGRAMME DE CONSTANTES -



Le 8° mot de la carte caractéristique contient : 99 9999 9999 ceci constitue un test qui bloque le déroulement du programme au cas où nous aurions oublié de mettre cette carte.



- SOUS-PROGRAMME DE PERFORATION -



Nous avons vu que les valeurs de $\text{tg } \alpha_1$ et $\text{tg } \alpha_2$ sont contenues dans deux zones du tambour .

Cherchons les mémoires qui contiennent les $\text{tg } \alpha_1$ et $\text{tg } \alpha_2$ d'un point A (i,j) :

$\text{tg } \alpha_1$ sera dans la mémoire:

$(i - 1).31 + j + 800$ soit

$31 i + j + 769$

et $\text{tg } \alpha_2$ sera dans la mémoire

$31 i + j + 769 + 500$ soit

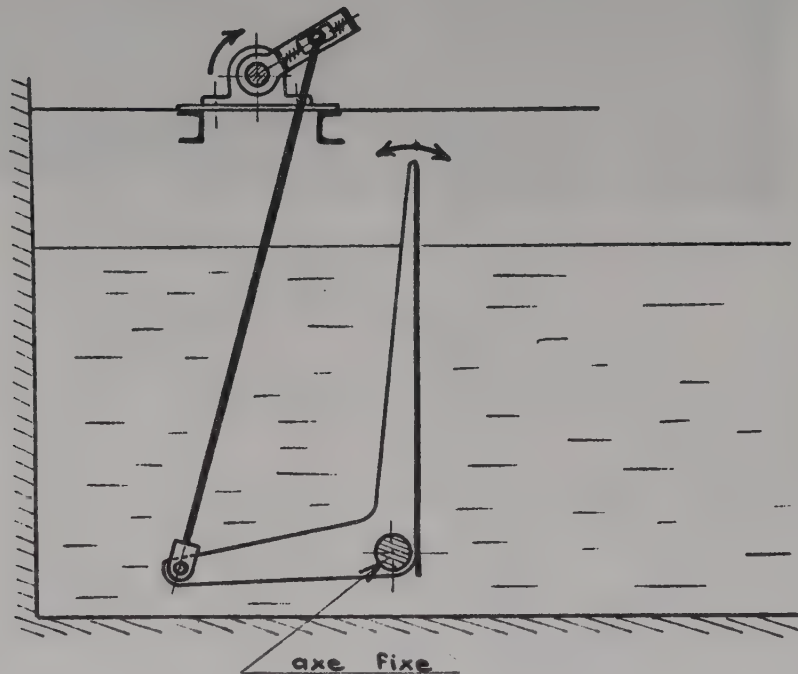
$31 i + j + 1269$

CHAPITRE II

EXEMPLES DE MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

2.1 - ETUDE D'UNE HOULE DROITE

Le Bassin de l'E.N.S.M. est équipé d'un dispositif générateur de houle. Nous représentons ci-dessous le schéma de l'installation.



La houle étant supposée cylindrique, il est facile de mesurer ses caractéristiques, par exemple en prenant un cliché d'une mire placée dans un plan vertical parallèle à la translation de la houle.

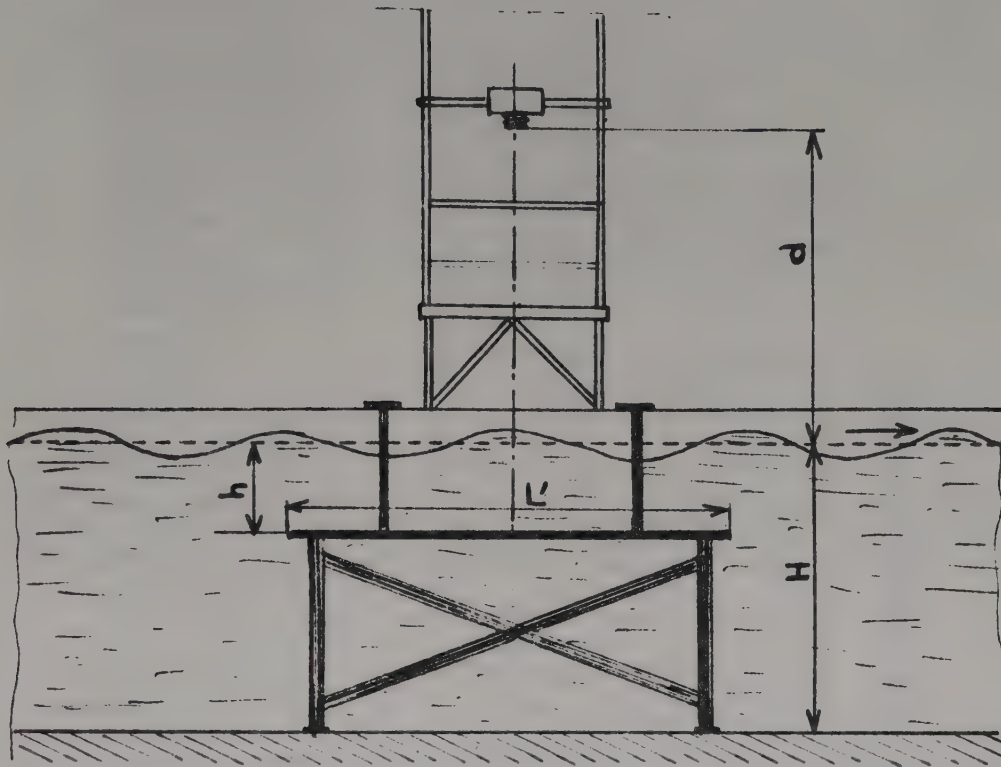
Comme nous pouvons le voir sur la photographie de la houle, l'onde créée est assez imparfaite. Il ne faut pas espérer retrouver, à partir de notre mire topographique, strictement le même profil pour des lignes différentes de la mire (c'est à dire pour des plans verticaux parallèles à la direction de propagation de l'onde.).



TYPE DE HOULE - Vue d'ensemble



CARACTERISTIQUES EXPERIMENTALES



- Bassin d'essai : $H = 2$ m ; largeur : 2,70 m ; longueur : 35 m .
- Distance du centre optique au plan d'eau : $d = 220$ cm .
- Profondeur d'immersion de la mire : $h = 60$ cm .
- Projection du centre optique sur la mire : ligne n°12
colonnes n° 16,5
- Mire : $L' = 3$ m .

APPLICATION DE LA METHODE

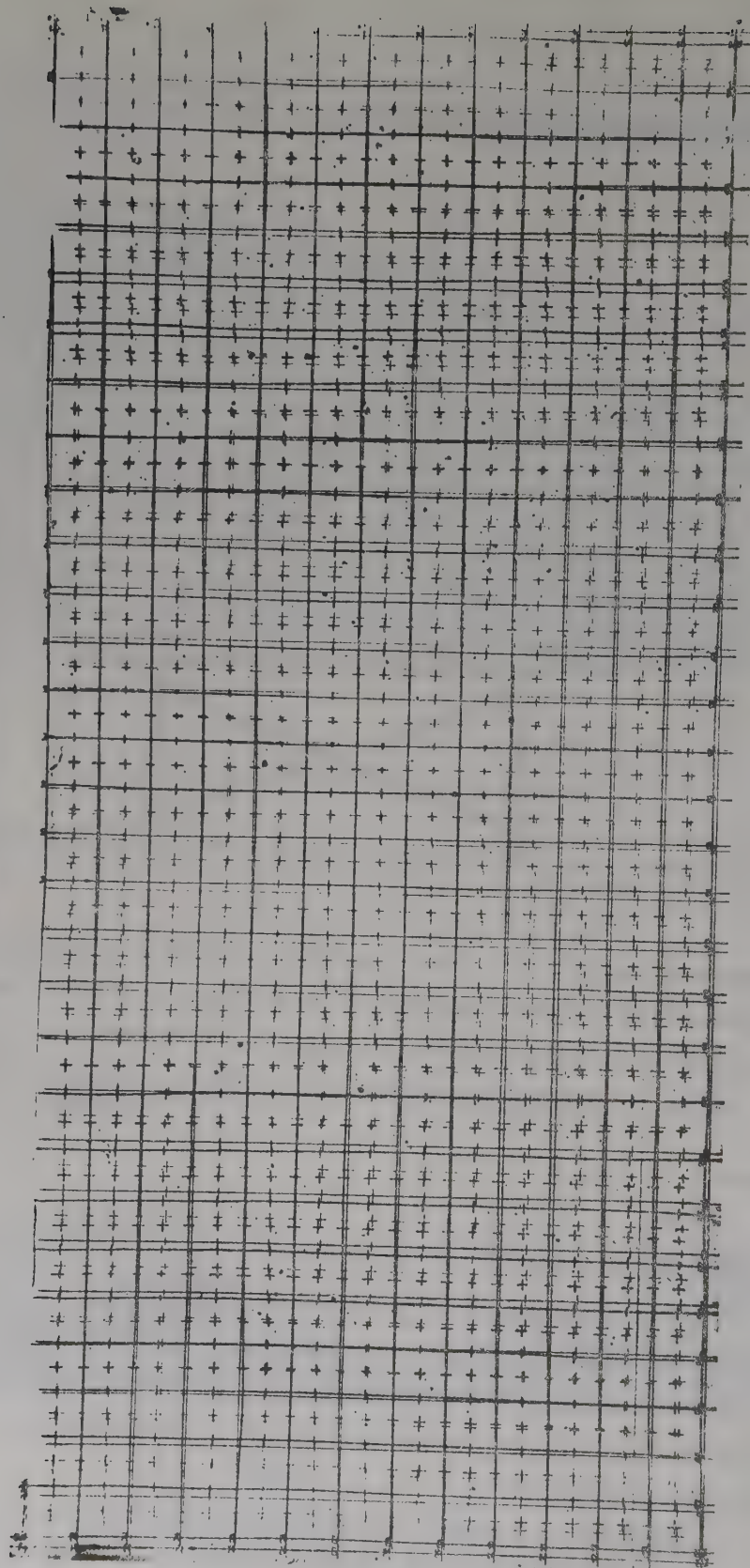
Nous trouvons page suivante une reproduction du cliché donnant l'image de la mire topographique en présence de la houle.

Nous mesurons les déplacements des points du quadrillage de la mire, à partir d'un tirage photographique à l'échelle 1/3, en effectuant les lectures au cathétomètre.

Nous avons groupé les diverses valeurs dans un tableau.

Ex: 51776 signifie 51 7760 0000 c'est-à-dire 7,76.

IMAGE DE LA MIRE EN PRESENCE DE LA HOULE



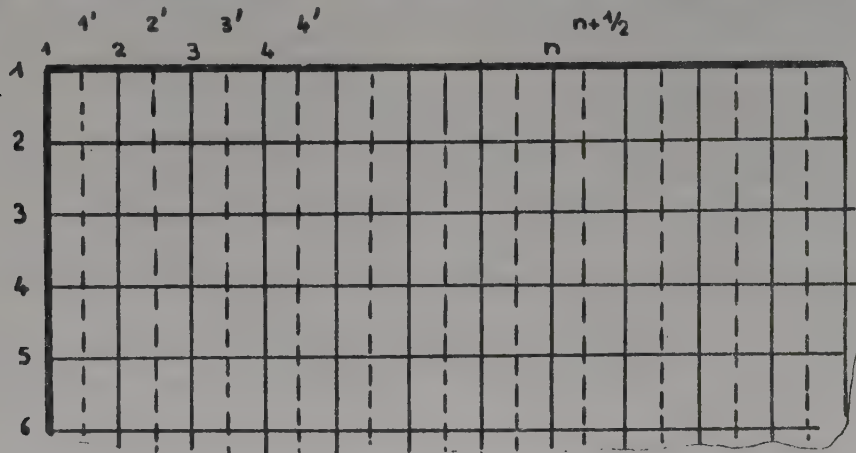
- VALEURS DES DEPLACEMENTS -

Ligne p	Colon. n	n	n + 1	n + 2
3	01	-51776	-51672	-51482
3	04	-51152	51106	51428
3	07	51154	51161	51600
3	10	51198	51260	51528
3	13	-51610	-51535	-51250
3	16	-51106	50430	51127
3	19	51365	51472	51460
3	22	51221	00000	-51308
3	25	-51662	-51585	-51518
3	28	-50540	00000	51244
3	31	51433	00000	00000
3	01	-51748	-51502	-51360
3	04	-51206	51110	51406
3	07	51590	51549	51394
3	10	50460	-51462	-51539
3	13	-51558	-51516	-51342
3	16	-50920	51148	51360
3	19	51472	51567	51588
3	22	51272	51120	-51526
3	25	-51567	-51491	-51310
3	28	-51108	-50820	51227
3	31	51466	00000	00000
3	01	-51698	-51470	-51198
3	04	50760	51309	51558
3	07	51678	51616	51572
3	10	50900	-51504	-51580
3	13	-51570	-51562	-51358
3	16	-51112	51170	51382
3	19	51523	51580	51472
3	22	51152	-51291	-51622
3	25	-51662	-51528	-51402
3	28	-51202	51135	51444
3	31	51724	00000	00000

Ligne p	Colon. n + 1/2	n + 1/2	n + 3/2	n + 5/2
3	01	-51722	-51600	-51336
3	04	-50780	51236	51478
3	07	51606	51626	51490
3	10	-50860	-51398	-51606
3	13	-51605	-51400	-51196
3	16	-50520	50730	51288
3	19	51409	51519	51359
3	22	51120	-51129	-51516
3	25	-51701	-51455	-51180
3	29	51136	51306	00000
3	01	-51630	-51404	-51326
3	04	-51103	51254	51534
3	07	51586	51522	51308
3	10	-51314	-51534	-51560
3	13	-51538	-51447	-51232
3	16	-50360	-51262	-51402
3	19	51523	51612	51474
3	22	50500	-51332	-51660
3	25	-51598	-51402	-51194
3	29	51168	51324	00000
3	01	-51596	-51340	-51101
3	04	51152	51422	51648
3	07	51673	51620	51152
3	10	-51362	-51558	-51568
3	13	-51552	-51482	-51234
3	16	50360	51260	51466
3	19	51589	51580	51359
3	22	50400	-51499	-51686
3	25	-51658	-51502	-51316
3	29	51272	51626	00000

Pour calculer les tangentes à la surface libre nous utilisons le programme de calcul explicité dans un chapitre précédent. Cependant, afin d'accroître la précision des calculs nous avons réduit le pas du quadrillage de moitié. C'est-à-dire que pour cette expérience le pas sera de 5 cm.

Pour garder le programme nous supposons que le nouveau quadrillage comporte deux réseaux A & B déphasés l'un par rapport à l'autre de 5 cm.



Ceci revient à grouper les déplacements en deux parties et à utiliser le programme deux fois.

Nous trouvons dans les pages suivantes deux tableaux correspondant aux réseaux A & B.

Nous avons représenté graphiquement les valeurs des tangentes. L'étude concerne uniquement trois lignes de la mire topographique. En effet il nous a semblé inutile de faire une étude complète pour une houle supposée sensiblement cylindrique.

Pour obtenir les divers profils de la houle il faut alors intégrer les courbes des tangentes. Nous avons pris ici la méthode des trapèzes.

Nous avons représenté les profils de la houle page 42.

Si nous comparons les résultats au relevé direct du profil de la houle par une mire verticale parallèle à la translation de la houle nous pouvons en déduire que notre méthode est certainement correcte.

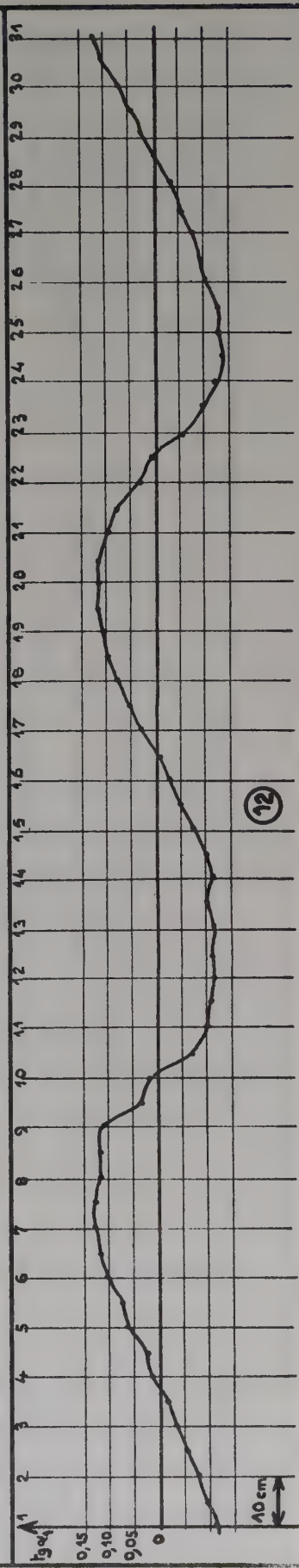
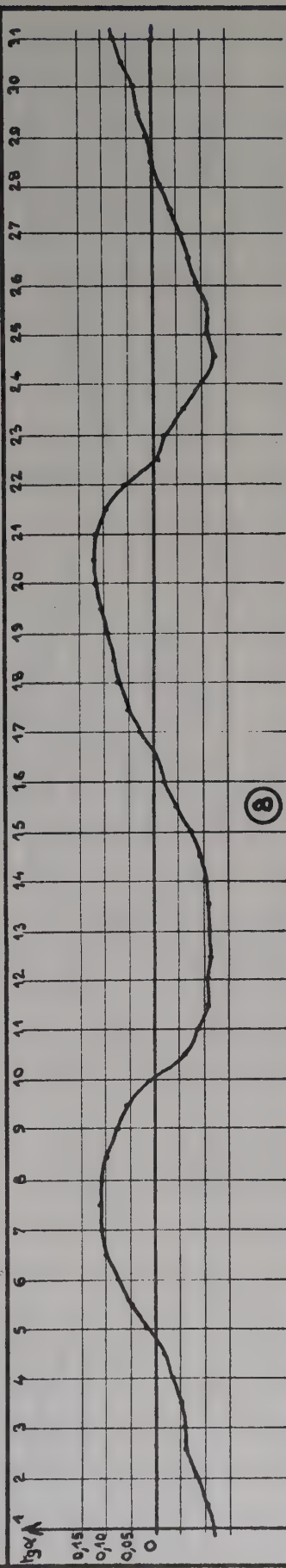
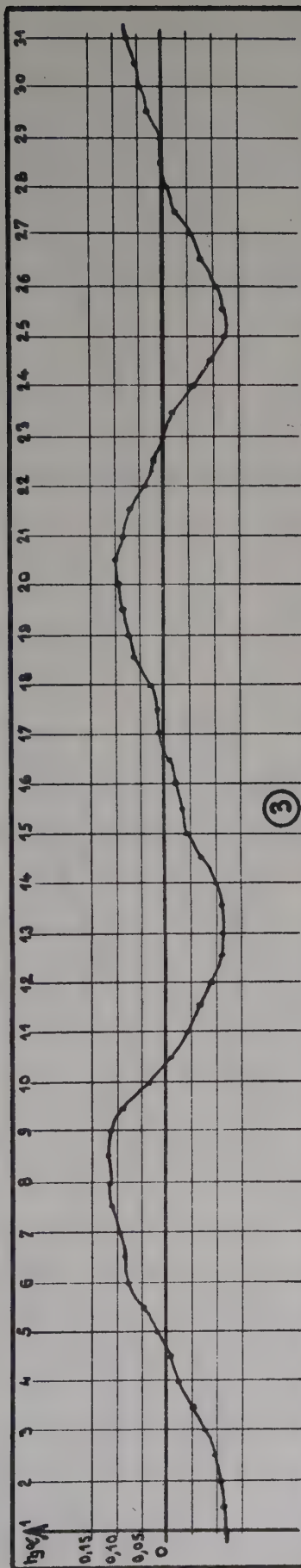
VALEURS DES TANGENTES (Réseau A)

Ligne p	Colonne n	n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	n + 5	n + 6
2	26	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-501200
3	02	-50106	-49779	-49250	49179	49739	49956	501105
3	09	50108	49362	-49480	-49984	-50114	-50101	-494768
3	16	-49202	48819	49242	49695	49894	49865	494127
3	23	00000	-49564	-50120	-50104	-49910	-48913	000000
3	30	49402	49700	00000	00000	00000	00000	000000
8	01	-50119	-49823	-49604	-49354	49191	49732	501086
8	08	50102	49748	48904	-49895	-50105	-50110	-501029
8	15	-49687	-49185	49298	49725	49947	50113	501163
8	22	49534	-49234	-50101	-50107	-49918	-49568	-491919
8	29	-49142	49389	49782	00000	00000	00000	000000
11	27	00000	00000	00000	00000	00000	-50112	-497782
12	03	-49335	49132	49051	50101	50126	50116	501101
12	10	49175	-49989	-50115	-50114	-50113	-49729	-492290
12	17	49348	49780	50106	50117	49947	49302	-495747
12	24	-50121	-50127	-50100	-49747	-49366	49239	497697
12	31	50122	00000	00000	00000	00000	00000	000000

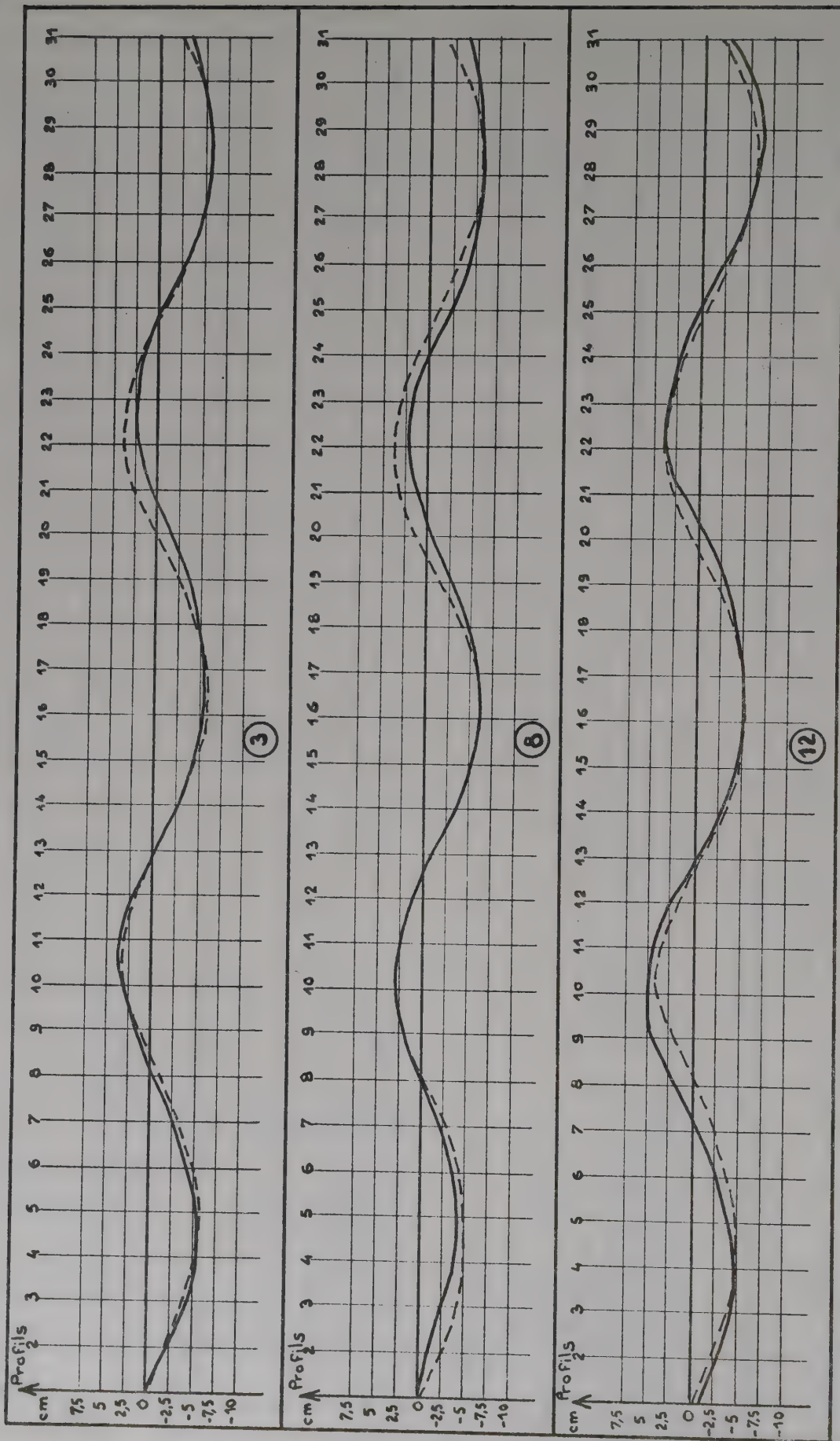
VALEURS DES TANGENTES (Réseau B)

	$n + 1/2$	$n + 3/2$	$n + 5/2$	$n + 7/2$	$n + 9/2$	$n + 11/2$	$n + 13/2$
2 26	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-501140
3 02	-49968	-49554	-49129	49405	49840	50108	501135
3 09	49898	-49157	-49742	-50113	-50114	-49762	-493749
3 16	-48991	49140	49548	49775	49976	49669	492198
3 23	-49234	-49934	-50125	-49799	-49309	00000	492253
3 30	49494	00000	00000	00000	00000	00000	000000
6 01	-50103	-49678	-49559	-49180	49456	49982	501097
8 08	49992	49593	-49609	-50104	-50110	-50107	-498977
6 15	-49467	-48723	-49528	49807	50104	50121	499296
8 22	48988	-49639	-50125	-50112	-49738	-49348	000000
8 29	49288	49544	00000	00000	00000	00000	000000
11 27	00000	00000	00000	00000	00000	-49986	-495764
12 03	-49172	49269	49770	50120	50127	50119	492959
12 10	-49711	-50110	-50113	-50111	-49981	-49478	487372
12 17	49531	49948	50119	50116	49714	48788	-499744
12 24	-50132	-50124	-49934	-49575	00000	49471	501058
12 31	00000	00000	00000	00000	00000	00000	000000

TANGENTES - LIGNES 3, 8 et 12

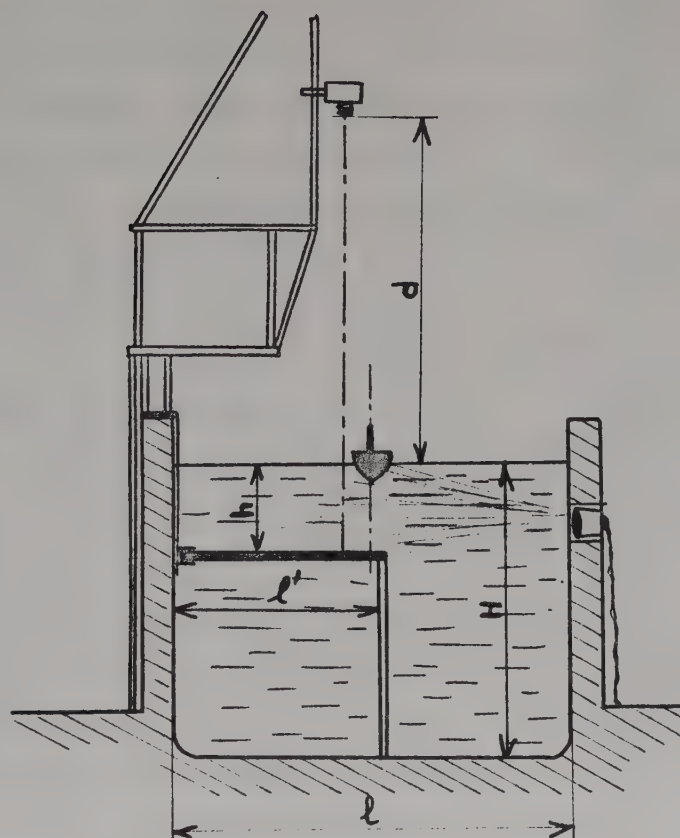


PROFILS DE LA HOULE - LIGNES 3 , 8 & 12



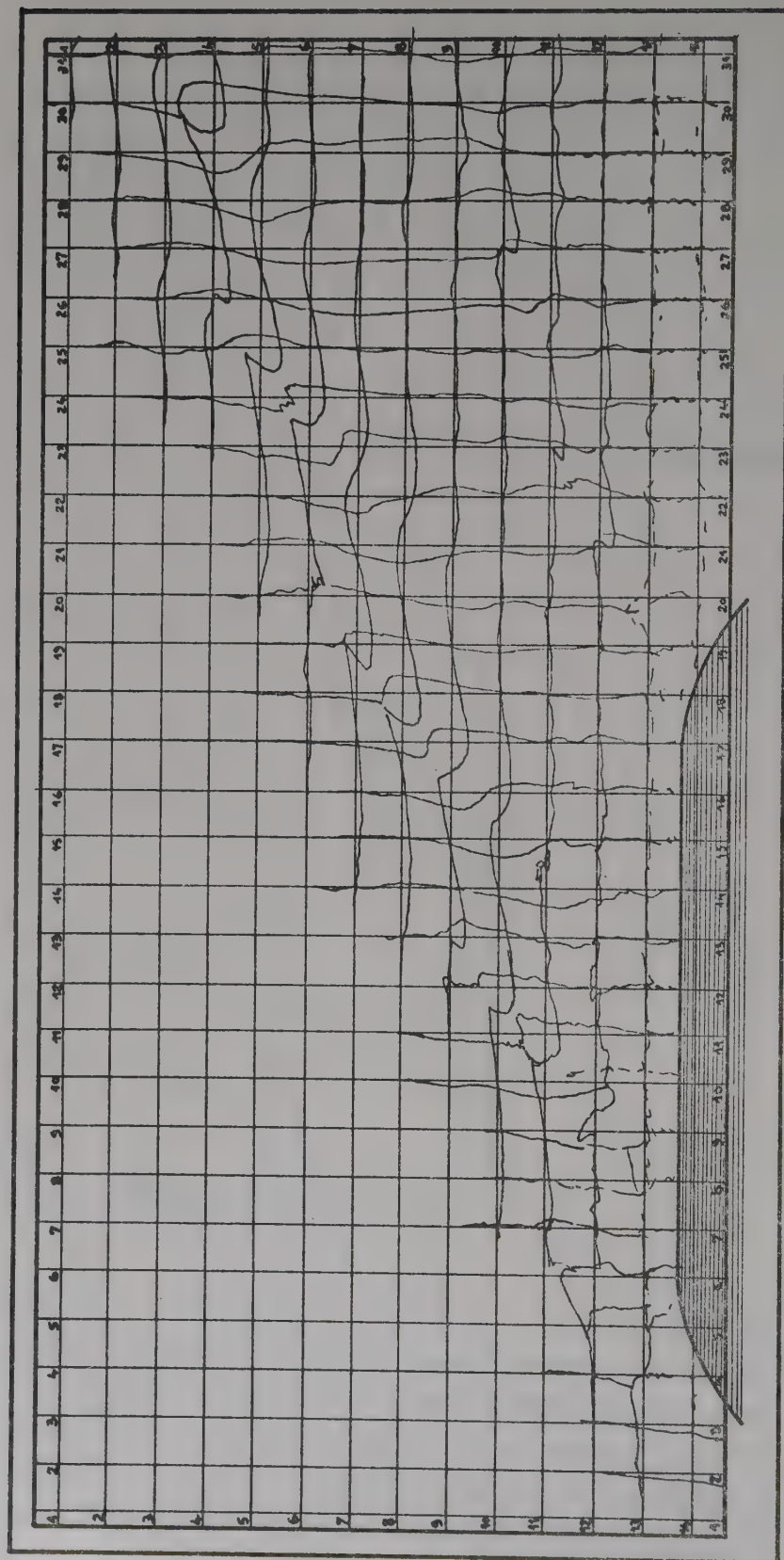
2.2 TOPOGRAPHIE INSTANTANEE DU CHAMP DE VAGUES D'UNE PENICHE SYMETRIQUE

CARACTERISTIQUES EXPERIMENTALES



- Bassin d'essai : $l = 2,70 \text{ m}$; $H = 2 \text{ m}$; longueur : 35 m .
- Distance centre optique au plan d'eau : $d = 217 \text{ cm}$.
- Profondeur d'immersion de la mire : $h = 62,5 \text{ cm}$.
- Projection du centre optique sur la mire : ligne n°12 , colonne n°16
- Maquette : longueur : 170 cm , largeur : $0,20 \text{ m}$.
- Vitesse de traction au moment du cliché : $0,8752 \text{ m/s}$.

IMAGE DE LA NIRE LORS DU PASSAGE DE LA PENICHE



Nous avons introduit au cours de la programmation une constante ECHEL. Précisons sa valeur pour cette expérience.

La relation (13), page 49 introduit un coefficient X variant très peu avec l'incidence i. Nous posons :

$$X = \frac{X_{i=0^\circ} + X_{i=35^\circ}}{2}$$

$$X_{i=0^\circ} = \frac{d + h}{d + 0,73 h}$$

$$X_{i=35^\circ} = \frac{d + h}{d + 0,68 h}$$

Pour $d = 217$ et $h = 62,5$ nous tirons :

$$X_{i=0^\circ} = 1,0603$$

$$X_{i=35^\circ} = 1,0750$$

d'où : $X = 1,0677$

Les mesures se font sur un tirage photographique à l'aide d'un cathétomètre. Le format de la photographie qui est de 83×40 cm est dans le rapport $1/0,267$. Les déplacements sont mesurés en mm. Pour exprimer les déplacements réels en cm nous multiplierons les valeurs de Δx et Δy par le coefficient X' tel que :

$$X' = \frac{1/0,2673}{10} = 0,3740$$

Nous posons : $ECHEL = X \cdot X'$

$$\text{d'où : } ECHEL = 1,0677 \cdot 0,3740$$

$$ECHEL = 0,399335$$

soit exprimé en Virgule Flottante : $(ECHEL) = 50\ 3993\ 5000$

Remarque : Dans les tableaux suivants qui donnent les valeurs de Δx et Δy exprimées en mm, et en Virgule Flottante, nous avons éliminé les 5 derniers chiffres qui étaient toujours des zéros. Par conséquent si nous prenons, par exemple, la valeur -50800 , il faut lire :

$$-50\ 8000\ 0000$$

c'est à dire : $-0,8$.

Nous procédons au calcul des valeurs de $\text{tg } \alpha_1$ et de $\text{tg } \alpha_2$ en utilisant le Programme explicité dans un chapitre précédent. Les résultats sont contenus dans les deux tableaux suivants.

- Valeurs des déplacements -

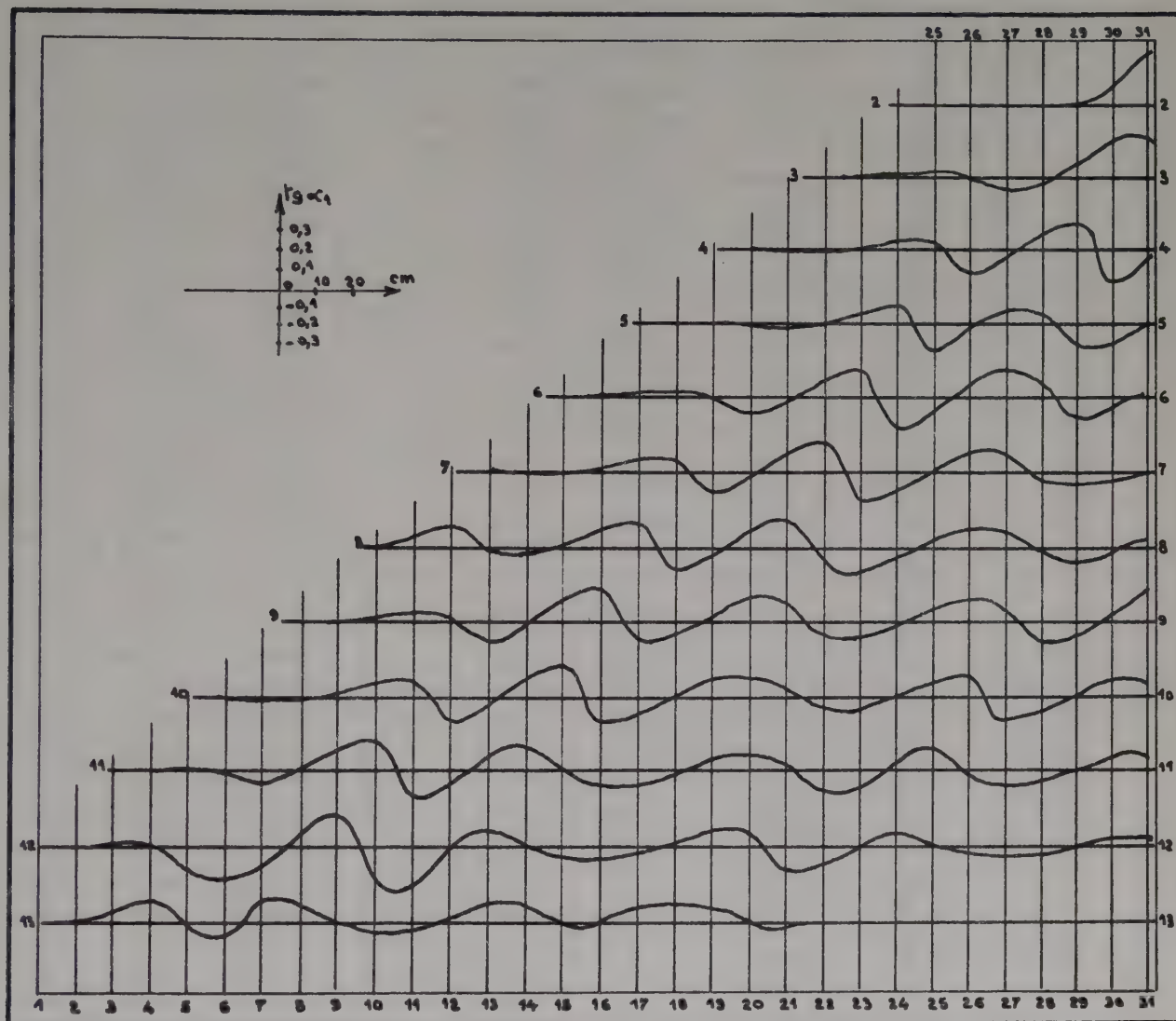
n°ligne	n°colonne	Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
03	24	-50800	00000	51140	-51120	00000	-51110
03	27	-51310	51220	-51100	51300	51330	00000
04	23	50700	00000	51240	-51130	00000	00000
04	25	51180	-51280	-51700	51870	-51180	51450
04	28	51380	-50900	51860	-51610	-51920	51490
04	31	-50600	51550	00000	00000	00000	00000
05	20	-50200	00000	-51130	51110	00000	00000
05	22	00000	51130	51260	-50900	51470	-51420
05	25	-51780	51860	-50900	51200	51340	-51220
05	28	51380	-51580	-51700	51320	-51570	51180
05	31	-51140	00000	00000	00000	00000	00000
06	17	50800	00000	51120	-50700	00000	50500
06	=20	-51420	51320	-51130	51320	51250	-50800
06	23	51690	-51130	-51850	51490	-51350	51190
06	26	51300	-51100	51720	-51350	51330	-51100
06	29	-51630	51120	-51230	00000	51200	-51160
06	11	50100	00000	-50100	00000	00000	00000
07	14	-50600	00000	-50600	51100	50600	50700
07	17	51240	-51120	51250	-51330	-51660	51660
07	20	-51170	51230	51330	-51180	51770	-51690
07	23	-51770	51460	-51520	51230	00000	-50600
07	26	-50100	-51310	51520	-51130	-51180	50500
07	29	-51390	00000	-51270	51100	51150	00000
08	11	50600	00000	51470	-51100	-50600	00000
08	14	-51180	51210	00000	51200	51170	51100
08	17	51560	-51530	-51730	51530	-51260	51180
08	20	51270	-51170	51710	-51470	-51300	51270
08	23	-51560	51210	-51200	50300	51190	-51140
08	26	51360	00000	51380	-50600	-51260	-50300
08	29	-51530	51120	-51150	51110	51350	-51120
09	10	50900	00000	51150	-51140	50800	-51230
09	13	-51560	51620	-51120	51290	51360	-51170
09	16	51790	-51740	51770	51600	-51290	51200
09	19	50600	-51130	51530	-51420	51440	-51170
09	22	-51350	50700	-51350	00000	-51150	51130
09	25	51180	00000	51450	-51120	51310	-51140

n°ligne	n°colonne	Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
09	28	-51610	51180	-51500	51290	51160	50300
09	31	51690	-51390	00000	00000	00000	00000
10	07	-51120	00000	-50800	51140	50800	51110
10	10	51280	-51100	51350	-51450	-51690	51570
10	13	-51170	51210	51300	-51190	51800	-51540
10	16	-51740	51460	-51440	51140	-50800	-51130
10	19	51280	-51210	51420	00000	51250	-50500
10	22	-51370	51130	-51340	51130	-50800	00000
10	25	51260	00000	51570	-51160	-51700	51480
10	28	-51400	51310	00000	-51280	51510	-51440
10	31	51280	50600	00000	00000	00000	00000
11	06	-51110	00000	-51390	51530	00000	51240
11	09	51470	-51170	51750	-51610	-51760	51650
11	12	-51330	51220	51260	-50400	51700	-51570
11	15	-50500	51150	-51350	51150	-51270	00000
11	18	-50900	-51100	51340	-51120	51370	-51210
11	21	51170	00000	-51590	51400	-51420	51440
11	24	51170	-50500	51560	-51440	-51180	51340
11	27	-51370	-51210	-51360	51200	00000	-51110
11	30	51390	51360	51260	00000	00000	00000
12	03	50500	00000	50400	-51130	-51850	51530
12	06	-51650	51440	-51120	51300	51330	-51210
12	09	51820	-51190	-51960	51520	-51660	51210
12	12	51220	51200	51460	-51100	51380	50300
12	15	-51220	00000	-51280	51150	-51210	51110
12	18	51110	-50900	51350	00000	51450	-51160
12	21	-51470	-51650	-51510	51220	00000	-50800
12	24	51340	-51260	51140	00000	51120	51270
12	27	-51310	50500	-51130	00000	50400	-50800
13	02	50700	00000	51150	-50900	51540	-51360
13	06	-51460	51370	51480	50700	51400	-51370
13	10	-51330	00000	-51210	-50800	00000	00000
13	13	51350	-50900	51350	00000	-51390	51130
13	17	51270	00000	-50800	51160	51350	51150
14	02	50900	00000	51360	-51110	00000	00000

- VALEURS DES TANGENTES α_1 -
 =====1

n°ligne	n°colonne	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6
03	23	00000	49165	49283	00000	-49613	-49196	49631
04	20	00000	00000	00000	49150	49501	49369	-50144
04	27	-49364	49742	50162	-50175	-49114	00000	00000
05	17	00000	00000	00000	-48458	-49282	00000	49559
05	24	49988	-50185	-49186	49681	49750	-50137	-50109
05	31	-49262	00000	00000	00000	00000	00000	00000
06	14	00000	00000	00000	49184	49274	00000	-49951
06	21	-49291	49551	50149	-50184	-49743	49621	50145
06	28	49657	-50125	-49445	49375	00000	00000	00000
07	11	00000	00000	00000	-49139	-49139	49139	49556
07	18	49574	-50135	-49387	49742	50169	-50171	-50113
07	25	00000	00000	50106	-49364	-49779	-49525	49283
08	08	00000	00000	00000	49136	50108	-49139	-49420
08	15	00000	49398	50130	-50125	-49603	49618	50160
08	22	-49678	-50125	-49439	49408	49760	49785	-49534
08	29	-50106	-49293	49663	00000	00000	00000	00000
09	05	00000	00000	00000	00000	00000	49204	49346
09	12	49185	-50131	-49282	49848	50185	-50113	-49681
09	19	49139	50122	50100	-49796	-49787	-49332	49390
09	26	49952	49644	-50126	-50101	49314	50131	00000
10	02	00000	00000	00000	00000	00000	-49261	-49179
10	09	49180	49641	49812	-50160	-49399	49708	50189
10	16	-50167	-50104	-49188	49655	49975	49575	-49816
10	23	-49767	-49177	49565	50120	-50149	-49832	00000
10	30	50100	49539	00000	00000	00000	00000	00000
11	06	00000	50116	49540	-49386	-50140	50150	49513
11	13	49612	50165	-49118	-49831	-49641	-49213	49798
11	20	49861	49392	-50135	-49955	49377	50121	-49392
11	27	-49787	-49749	00000	49780	49499	00000	00000
12	03	49101	48842	-50178	-50139	-49265	49739	50186
12	10	-50218	-50152	49515	49946	49429	-49522	-49666
12	17	-49294	49260	49822	50104	-50109	-50117	00000
12	24	49756	49305	49261	-49655	-49267	48818	00000
12	31	00000	00000	49137	49304	50112	00000	-49986
13	07	50105	49897	00000	-49752	-49485	00000	49824
13	14	49828	-49924	00000	49640	-49189	49821	00000
13	28	00000	00000	00000	00000	00000	49175	49728

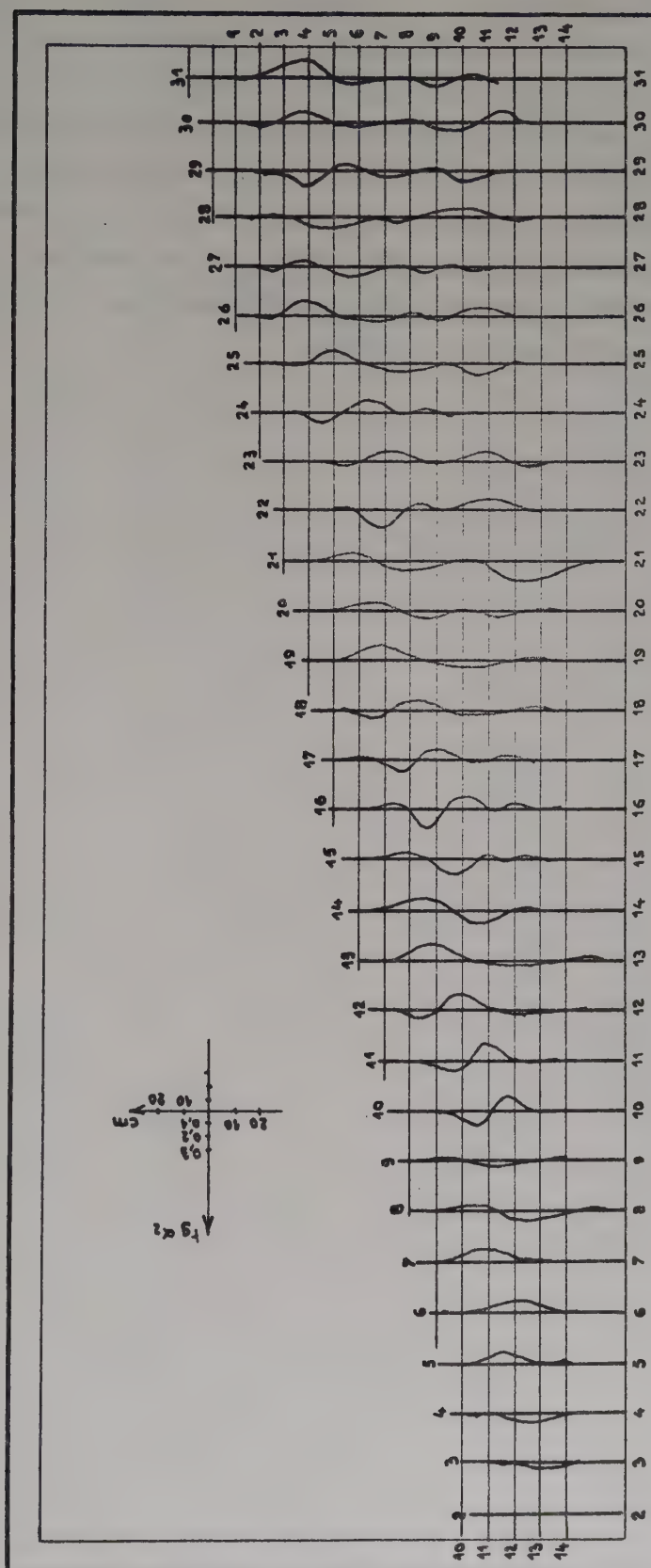
Ce tableau des différentes valeurs de $\text{tg } \alpha_1$ nous permet de tracer le réseau des courbes représentatives que nous trouvons page suivante.

RESEAU TG α_1 

- VALEURS DES TANGENTES α_2 -

n° ligne	n° colonne	n	n+1	n+2	n+3	n+4	n+5	n+6
03	23	00000	00000	-49242	-49206	49434	49589	00000
04	20	00000	00000	00000	00000	-49271	-49575	50179
04	27	49911	-49175	-50115	49936	50105	00000	00000
05	17	00000	00000	00000	00000	49243	49285	-49193
05	24	-49883	50139	49414	-49441	-50114	49628	49345
06	14	00000	00000	00000	00000	-49159	49113	49724
06	21	49717	-49176	-49282	50106	49403	-49207	-49705
06	28	-49199	49238	00000	-49300	00000	00000	00000
07	11	00000	00000	00000	00000	49231	49162	-49278
07	18	-49758	50135	49524	-49404	-50152	50102	49502
07	25	00000	-49662	-49266	49101	00000	49194	00000
08	08	00000	00000	00000	00000	-49231	00000	49490
08	15	49167	49234	-50123	49912	49417	-49389	-50106
08	22	49610	49469	48659	-49300	00000	-49124	-48616
08	29	49241	49215	-49227	00000	00000	00000	00000
09	05	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49323
09	12	-49534	50145	49681	-49400	-50173	49882	49469
09	19	-49302	-49966	-49388	49159	00000	49287	00000
09	26	-49253	-49291	49371	49587	48589	-49742	00000
10	02	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49313
10	09	49248	-49229	-50104	50132	49493	-49418	-50127
10	16	50104	49331	-49306	-49491	00000	-49115	49297
10	23	49293	00000	00000	-49339	50102	49645	-49554
10	30	-49868	49115	00000	00000	00000	00000	00000
11	06	00000	50116	49540	-49385	-50140	50150	49513
11	13	-48942	-50135	49356	49356	00000	-49236	-49281
11	20	-49489	00000	49920	50100	-49110	-49958	49741
11	27	-49447	49416	-49142	49720	00000	00000	00000
12	03	00000	-49273	50111	49942	49664	-49470	-49432
12	10	50118	49483	49468	-49205	48338	00000	49356
12	17	49154	-49213	00000	-49372	-50151	49506	-48768
12	24	-49578	00000	49588	49105	00000	-49163	00000
12	31	00000	00000	00000	-49182	-49753	00000	49793
13	07	49153	-49829	00000	00000	-49184	00000	-49212
13	14	00000	49308	00000	00000	49378	49352	00000
13	28	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49222

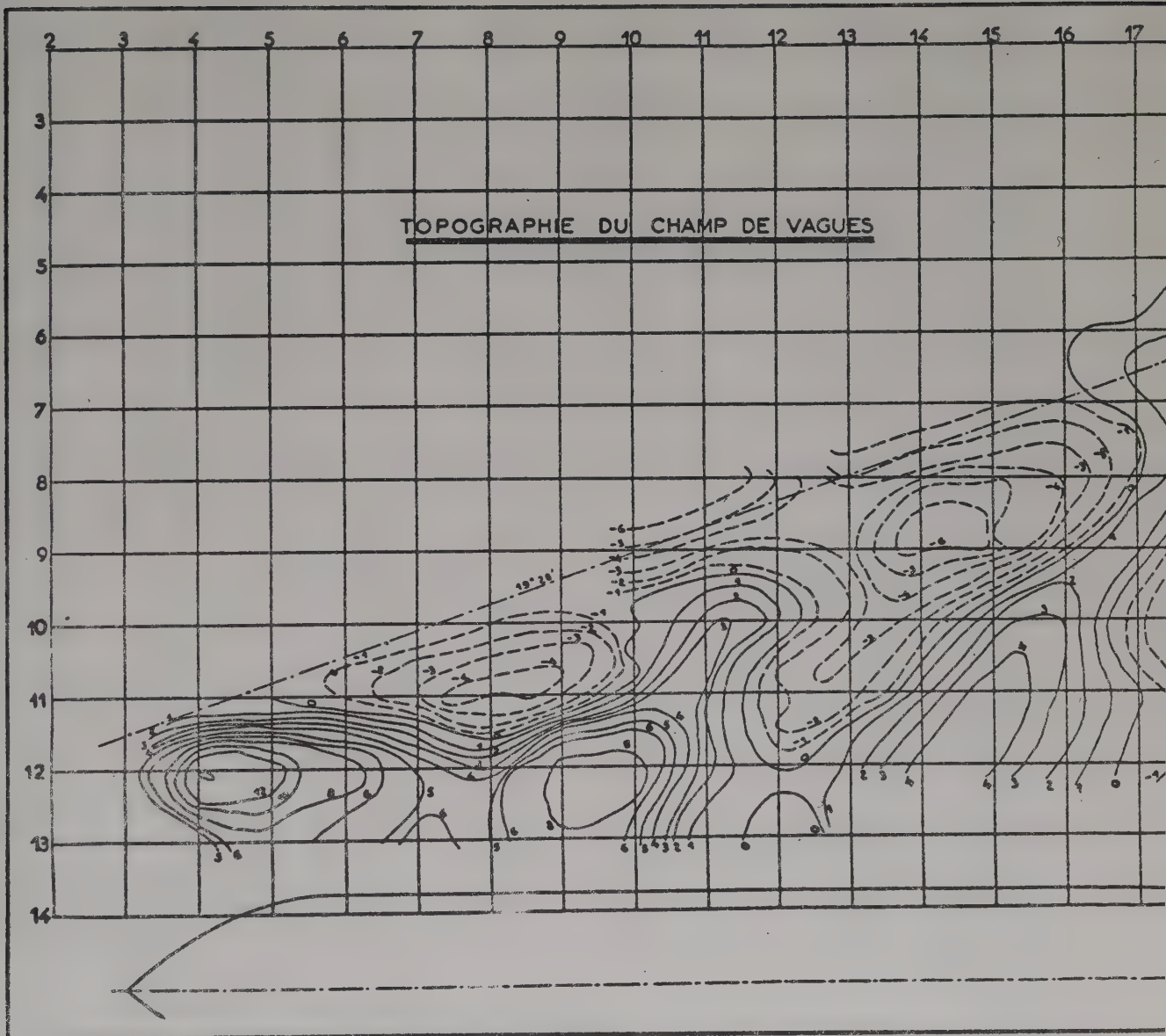
Nous traçons maintenant le réseau des courbes représentatives des variations de $\text{tg } \alpha_2$. (voir page suivante)

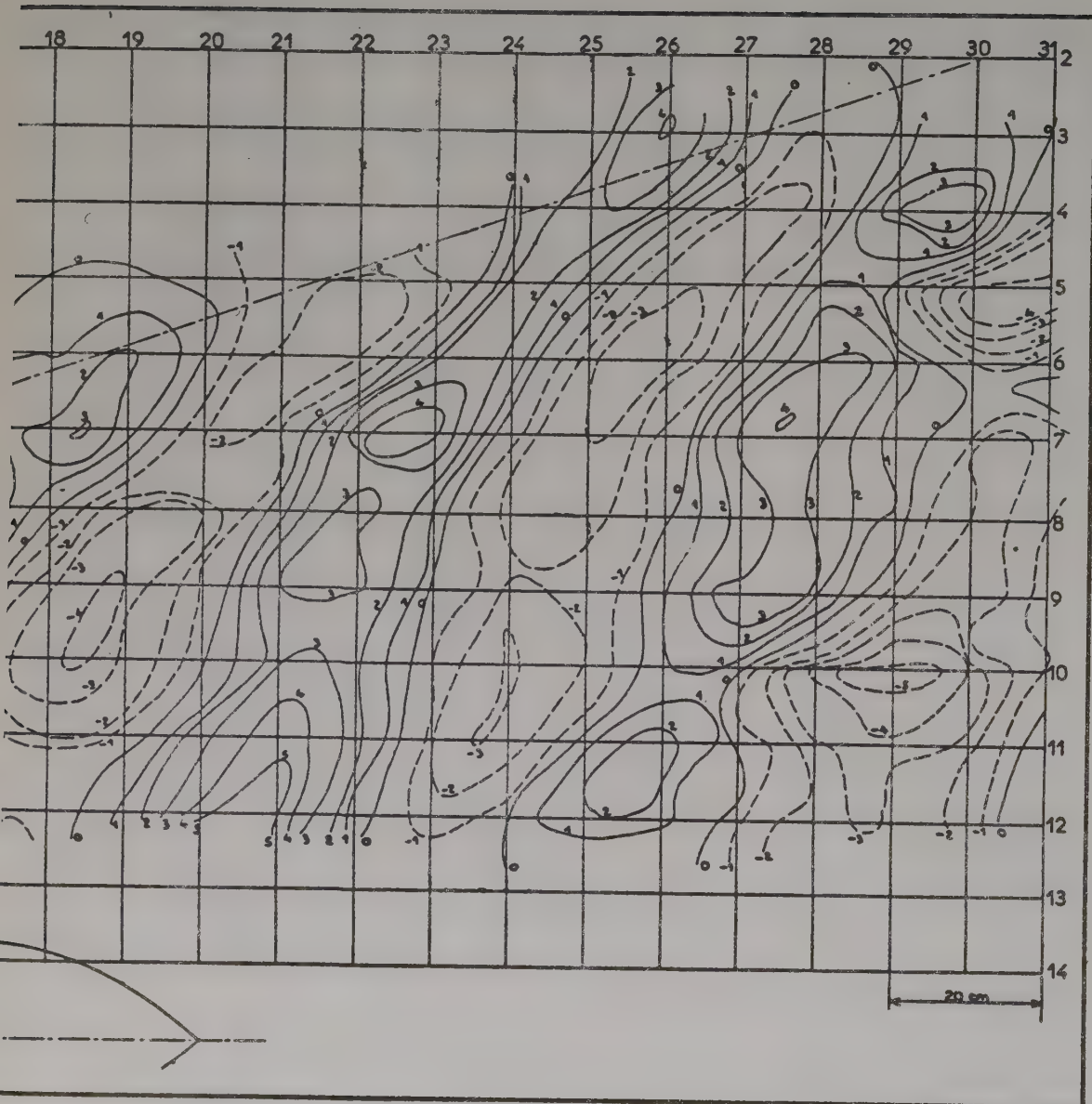
RESEAU TG α_2 

CONCLUSION :

Nous avons tenté ici de dresser la topographie instantanée du champ de vagues d'une péniche, aussi près que possible de celle-ci. Nous avons tracé sur la carte la droite qui fait un angle de $19^{\circ} 28'$ avec l'axe de symétrie longitudinale. Nous constatons que les perturbations de la surface libre sont localisées dans le secteur formé. Ceci est un résultat important.

Les zones de turbulence intense derrière la péniche et la zone immédiatement voisine ne nous permettent pas de préciser le champ de vagues. Nous remarquerons cependant que les déformations de la mire sont visibles jusqu'à environ 10 cm de la péniche.





- D E U X I E M E P A R T I E -

C H A P I T R E I I I

**CHAMP DE VAGUES D'UNE CARENE DE PROFONDEUR
CONSTANTE A COUPLES RECTANGULAIRES ET LIGNES
D'EAU PARABOLIQUES**

3.1 - INTRODUCTION

=====

Nous nous proposons d'utiliser notre méthode expérimentale pour préciser les limites de validité de certaines théories linéaires de l'hydrodynamique des fluides parfaits, en présence d'une surface libre.

Nous avons repris ici le cours de Dynamique du Navire de M. BRARD [6]. Nous avons suivi scrupuleusement, en particulier, l'exposé du calcul de la dénivellation de la surface libre, étude contenue dans le chapitre 0,3 : "Théorie des sources et des puits en présence d'une surface libre".

Pour appliquer cette méthode nous avons dû faire choix d'une maquette particulière. Nous voulions représenter la carène par une distribution de sources et de puits situés dans le plan longitudinal de symétrie. Nous avons effectué l'approximation de Havelock qui consiste à ne considérer qu'une seule répartition dans le plan longitudinal telle que pour tout point P de ce plan on vérifie :

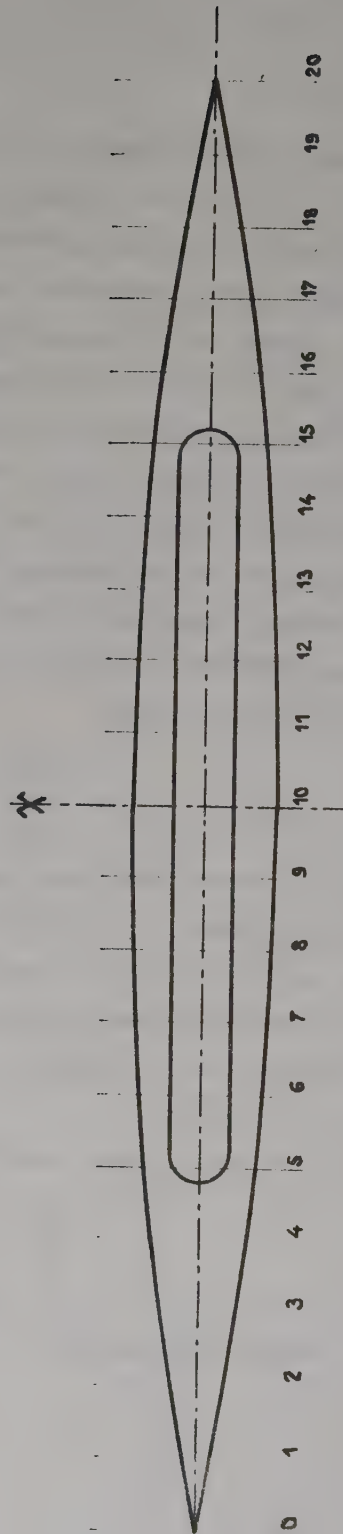
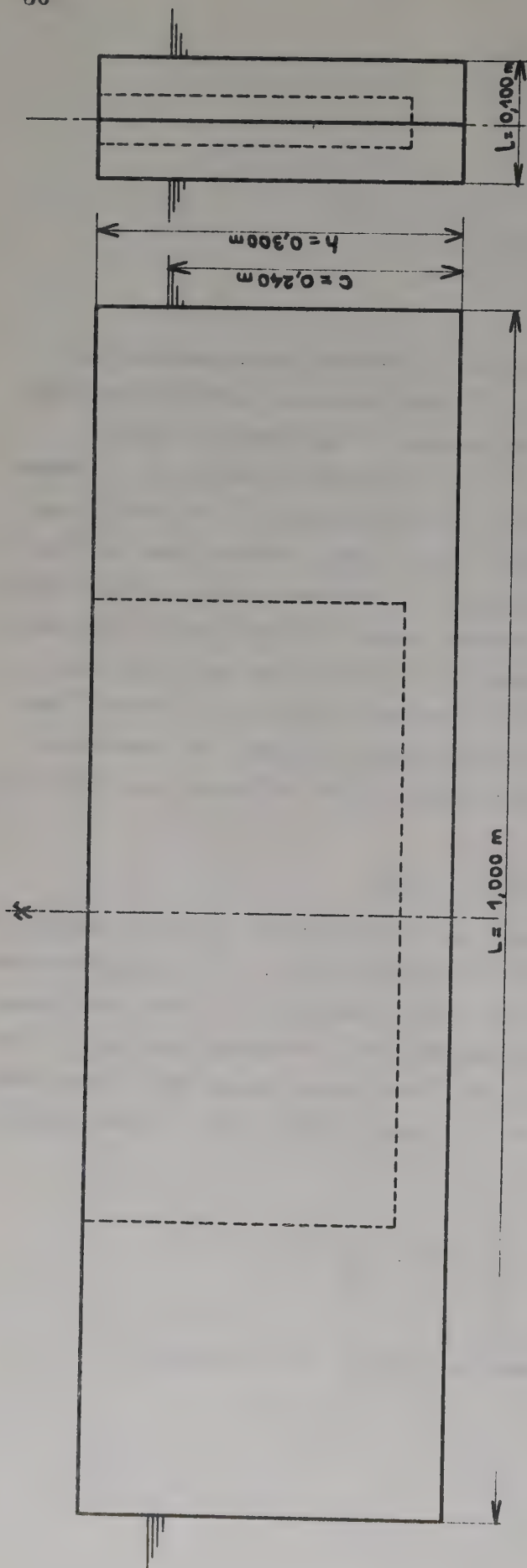
$$(\overline{V} \cdot \overline{n})_P = \overline{V}_r \cdot \overline{n}_M = f(M)$$

c'est à dire qu'en un point M, dont la projection orthogonale sur le plan longitudinal de symétrie est P, la composante normale de la vitesse d'écoulement a une valeur donnée f(M). Nous négligeons en outre au point M les composantes normales des vitesses induites par les autres sources ou puits extérieurs à P. Nous avons choisi une carène mince - le rapport de la longueur et de la largeur est de 10 -, asymétrique et à parois verticales.

La carène a pour équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \pm \frac{l}{2} \left[1 - \frac{4x^2}{L^2} \right] \\ -c < z < 0 \end{array} \right.$$

Nous trouvons page suivante le plan de cette maquette.



n° des couples	0-20	1-19	2-18	3-17	4-16	5-15	6-14	7-13	8-12	9-11	10
Demi-largeur en mm	0	9,5	18,0	25,5	32,0	37,5	42,0	45,5	48,0	49,5	50,0

3.2 - E T U D E T H E O R I Q U E

1°- Vagues produites par une source :

Le système des axes rectangulaires $Ox'y'z'$ de référence est tel que les axes Ox' et Oy' sont contenus dans le plan de surface libre au repos et que l'axe Oz' est vertical et dirigé vers le haut. La profondeur est supposée infinie. Soient h , k et f les coordonnées d'une source S d'intensité σ .

Supposons que la source ait un débit constant et qu'elle se déplace à une vitesse constante V , suivant l'axe des x' .

Le potentiel exprimé par rapport aux axes relatifs a pour expression :

$$\varphi(x', y', z', t) = \varphi(x' - V \cdot t, y', z') = \varphi_A(x, y, z)$$

Supposons que la source soit située dans le plan vertical de symétrie.

D'après l'approximation de POISSON, la dénivellation de la surface libre ζ s'écrit :

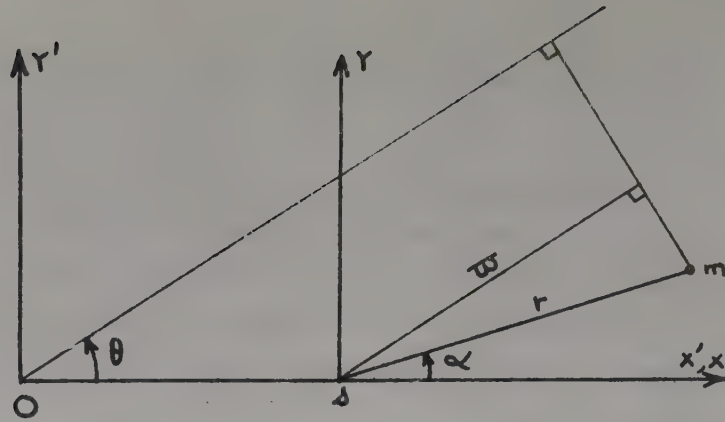
$$\zeta = \frac{V}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0} \quad \text{en utilisant les axes } Oxyz \text{ liés à la source.}$$

Monsieur R. BRARD, dans son cours de Dynamique du navire, montre que la dénivellation de surface libre ζ pour un point M peut s'obtenir finalement par la relation :

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{4\sigma \cdot g}{V^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \alpha} \sec^3 \theta \cdot e^{X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot f} \cdot \cos [X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)] d\theta \\ & + \frac{2\sigma}{\pi \cdot V} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \alpha} d\theta \cdot \sec \theta \int_0^\infty \frac{e^{-m\omega} [m \cdot \cos(mf) + X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot \sin(mf)] m dm}{m^2 + X_0^2 \cdot \sec^4 \theta} \\ & - \frac{2\sigma}{\pi \cdot V} \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \sec \theta \int_0^\infty \frac{e^{-m\omega} [m \cdot \cos(mf) + X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot \sin(mf)] m dm}{m^2 + X_0^2 \cdot \sec^4 \theta} \\ \text{avec : } & X_0 = \frac{g}{V^2} \end{aligned}$$

Nous rappelons en outre qu'un point M de la surface libre déformée se projette en un point m sur le plan $Ox'y'$, la projection de S étant s . Si nous posons $r = sm$, il vient :

$$\omega = r \cdot \cos(\theta - \alpha) = (x' - h) \cdot \cos \theta + y' \cdot \sin \theta$$



2°- Etude de la fonction ζ dans le plan $z = 0$.

Nous poserons : $x + iy = r \cdot e^{i\alpha}$. Lorsque r tend vers l'infini les intégrales en θ et m tendent rapidement vers zéro. Pour r assez grand nous pouvons écrire :

$$\zeta \approx \frac{4\pi g}{v^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} + \alpha} \sec^3 \theta \cdot e^{x_0 \sec^2 \theta \cdot f} \operatorname{Re} \left\{ e^{i x_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)} \right\} d\theta$$

D'après le principe de phase stationnaire les seules valeurs de θ qui apportent une contribution sensible dans le calcul de ζ sont celles qui rendent l'exposant stationnaire. Ces valeurs sont données par les racines de l'équation :

$$\frac{d}{d\theta} [r \cdot \sec^2 \theta \cdot \cos(\theta - \alpha)] = 0$$

L'expression de ζ peut alors s'écrire, avec une précision aussi grande que l'on voudra :

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{4\pi g}{v^3} \int_{\theta' - \epsilon}^{\theta' + \epsilon} \sec^3 \theta \cdot e^{x_0 \sec^2 \theta \cdot f} \operatorname{Re} \left\{ e^{i x_0 \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)} \right\} d\theta \\ & + \frac{4\pi g}{v^3} \int_{\theta'' - \epsilon}^{\theta'' + \epsilon} \sec^3 \theta \cdot e^{x_0 \sec^2 \theta \cdot f} \operatorname{Re} \left\{ e^{i x_0 \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)} \right\} d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne l'élongation de la vague transverse et la seconde l'élongation de la vague divergente au point M.

Nous posons respectivement dans la première et seconde intégrales :

$$\theta - \theta' = \mu$$

$$\theta - \theta'' = \mu$$

d'où l'expression de ζ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta' \cdot e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot f} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \mathcal{R}_e \cdot e^{i\varphi(\theta'+\mu)} \cdot d\mu \\ & + \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta'' \cdot e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot f} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \mathcal{R}_e \cdot e^{i\varphi(\theta''+\mu)} \cdot d\mu \end{aligned}$$

Appliquons le théorème de TAYLOR :

$$\varphi(\theta'+\mu) = \varphi(\theta') + \frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta') + \dots$$

et

$$\varphi(\theta''+\mu) = \varphi(\theta'') + \frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta'') + \dots$$

avec :

$$\varphi'(\theta') = \varphi'(\theta'') = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta' \cdot e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot f} \cdot \mathcal{R}_e \left[e^{i\varphi(\theta')} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{i\frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta')} \cdot d\mu \right] \\ & + \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta'' \cdot e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot f} \cdot \mathcal{R}_e \left[e^{i\varphi(\theta'')} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{i\frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta'')} \cdot d\mu \right] \end{aligned}$$

Posons :

$$A = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{i\frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta')} \cdot d\mu$$

$$B = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{i\frac{\mu^2}{2} \varphi''(\theta'')} \cdot d\mu$$

$$\text{avec : } \mu = \rho \cdot e^{i\chi}$$

$$A = e^{i\chi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\left\{ \frac{\rho^2}{2} [\cos(2\chi + \frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(2\chi + \frac{\pi}{2})] \right\} \varphi''(\theta')} \cdot d\rho$$

$$B = e^{i\chi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\left\{ \frac{\rho^2}{2} [\cos(2\chi + \frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(2\chi + \frac{\pi}{2})] \right\} \varphi''(\theta'')} \cdot d\rho$$

$\varphi''(\theta')$ et $\varphi''(\theta'')$ sont nécessairement opposées en signe. Nous prendrons : $\varphi''(\theta') > 0$ et $\varphi''(\theta'') < 0$.

Cette dernière remarque entraîne que nous prenons $X = \frac{\pi}{4}$ dans l'intégrale de A et $X = -\frac{\pi}{4}$ dans l'intégrale de B pour assurer la convergence. d'où :

$$A = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}}.$$

et

$$B = e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}}.$$

La dénivellation ξ de la surface libre, pour une source est donnée par :

$$\xi = \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta' \cdot e^{X_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot f} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta') \right] \\ + \frac{4\pi g}{V^3} \cdot \sec^3 \theta'' \cdot e^{X_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot f} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}} \cdot \cos \left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'') \right]$$

3°- Condition d'équivalence :

Nous nous proposons d'étudier le champ de vagues d'une carène simple, d'équation :

$$Y = \pm F(x, z).$$

D'après HAVELOCK, M. BRARD montre que le calcul approximatif de la répartition de sources, dans le plan longitudinal de symétrie, conduit à une condition d'équivalence permettant de déterminer la densité σ des sources :

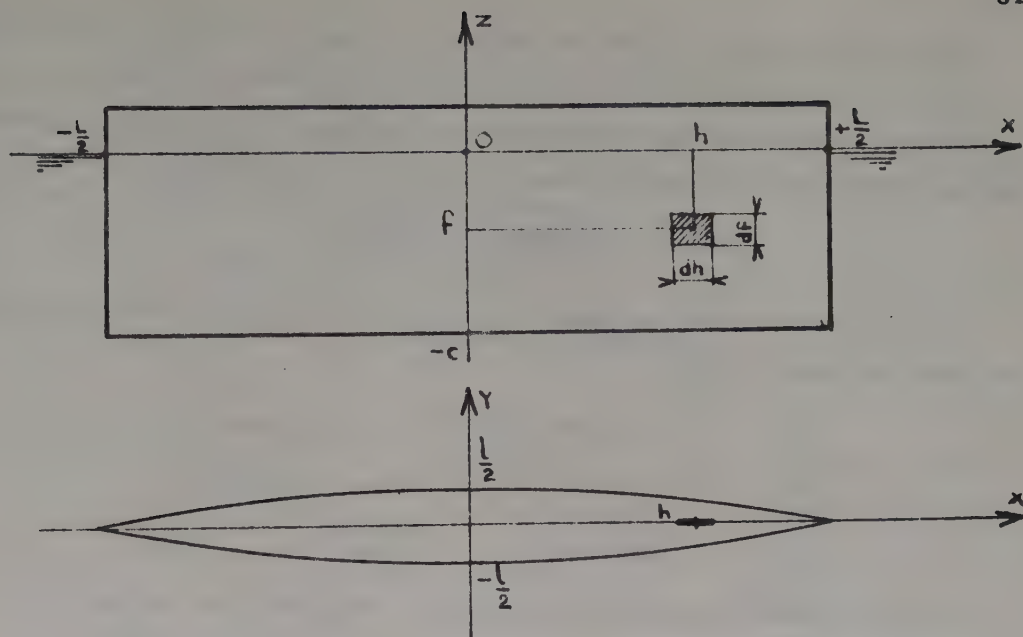
$$2\pi \cdot \sigma = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right] \cdot V$$

$$\sigma = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right] \cdot \frac{V}{2\pi}$$

Cette condition suppose en particulier que la carène soit mince.

4°- Exemple : nous prendrons une carène d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \pm \frac{L}{2} \left[1 - \frac{4x^2}{L^2} \right] \\ -c < z < 0 \end{array} \right.$$

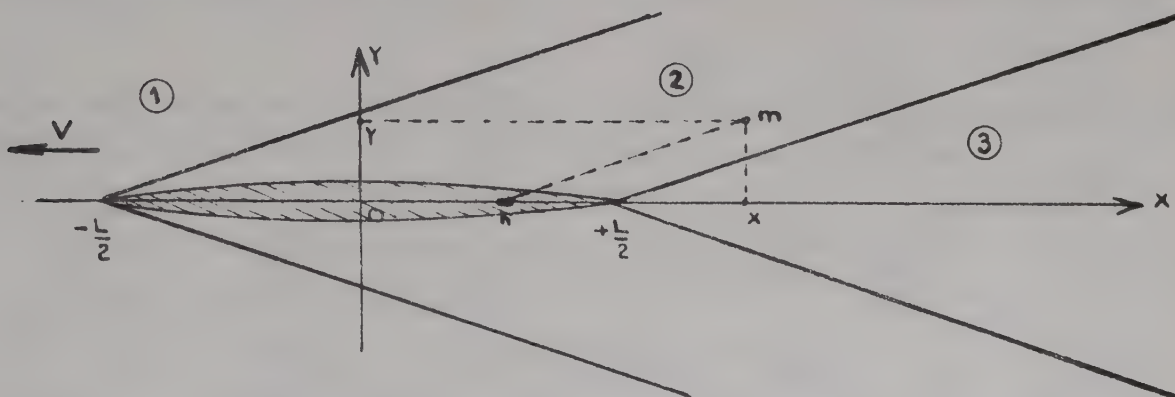


$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{4L}{L^2} \cdot h \quad -c < z < 0$$

Nous pouvons reprendre l'expression de Σ trouvée dans le 2^e paragraphe et remplacer ∇ par la valeur donnée par la condition d'équivalence.

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\frac{8g \cdot L}{\pi \cdot L^2 \cdot v^2} \int_A^B \sec^3 \theta' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta')\right] \cdot h \cdot dh \cdot \int_0^{-c} e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot f} \cdot df \\ & -\frac{8g \cdot L}{\pi \cdot L^2 \cdot v^2} \int_A^B \sec^3 \theta'' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}} \cdot \cos\left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'')\right] \cdot h \cdot dh \cdot \int_0^{-c} e^{x_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot f} \cdot df \end{aligned}$$

Précisons les bornes d'intégration A et B.



Les sources sont réparties dans le plan longitudinal de symétrie. Par suite h varie entre $-\frac{L}{2}$ et $+\frac{L}{2}$.

Dans le plan Oxy , pour un point m donné, il faut préciser quelles sont les sources (ou les puits) qui apportent une contribution dans le calcul de ξ . Nous retrouvons une conséquence du principe de phase stationnaire. Nous voyons immédiatement qu'il faut réaliser la condition :

$$h < x - 2\sqrt{2} \cdot y$$

Il en résulte que le plan Oxy , du point de vue de l'intégration, est partagé en trois zones:

- ① $h > x - 2\sqrt{2} \cdot y \quad \xi = 0$
- ② $A = -\frac{L}{2}, \quad B = x - 2\sqrt{2} \cdot y$
- ③ $A = -\frac{L}{2}, \quad B = +\frac{L}{2}$

Nous pouvons intégrer l'expression de ξ pour la variable f .

$$\int_0^{-c} e^{X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot f} \cdot df = \frac{1 - e^{-X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot c}}{X_0 \cdot \sec^2 \theta}$$

d'où l'expression générale de la dénivellation en un point M de la surface libre :

$$\begin{aligned} \xi = & -\frac{8L}{\pi \cdot L^2} \int_A^B \sec \theta' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}} \cdot [1 - e^{-X_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot c}] \cdot \cos \left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta') \right] \cdot h \cdot dh \\ & - \frac{8L}{\pi \cdot L^2} \int_A^B \sec \theta'' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}} \cdot [1 - e^{-X_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot c}] \cdot \cos \left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'') \right] \cdot h \cdot dh \end{aligned}$$

Il ne nous semble pas possible d'intégrer cette fonction de la dernière variable h qui intervient dans les expressions de $\sec \theta$, $\varphi(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$.

Soit : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x-h}$

En reprenant le principe de phase stationnaire nous savons que les valeurs de l'angle θ que nous avons considérées sont celles qui sont solutions de l'équation :

$$\frac{d}{d\theta} [r \cdot X_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot \cos(\theta - \alpha)] = 0 = \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[r \cdot X_0 \cdot \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \theta} \right] = 0 = \varphi'(\theta)$$

$$\varphi'(\theta) = r \cdot X_0 \frac{2 \cos(\theta - \alpha) \cdot \sin \theta - \sin(\theta - \alpha) \cdot \cos \theta}{\cos^3 \theta}$$

Cette relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\varphi'(\theta) = \frac{r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha}{\cos \theta} [2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha] = 0$$

Posons : $\varphi_1(\operatorname{tg} \theta) = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha = 0$

Les solutions de $\varphi'(\theta)$ sont celles de φ_1 , soit :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{4 \operatorname{tg} \alpha}$$

d'où : $\varphi'(\theta) = \frac{r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha}{\cos \theta} \cdot \varphi_1(\operatorname{tg} \theta)$

Soit en dérivant une nouvelle fois par rapport à θ :

$$\varphi''(\theta) = r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha \frac{\cos \theta \cdot \varphi_1'(\operatorname{tg} \theta) \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} + \varphi_1(\operatorname{tg} \theta) \cdot \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\varphi''(\theta) = \frac{r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \theta} \cdot \left[\varphi_1(\operatorname{tg} \theta) \cdot \sin \theta + \frac{\varphi_1'(\operatorname{tg} \theta)}{\cos \theta} \right]$$

Or pour $\theta = \theta'$ ou $\theta = \theta''$ nous avons : $\varphi_1(\operatorname{tg} \theta) = 0$

d'où : $\varphi''(\theta) = \frac{r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha}{\cos^3 \theta} \cdot \varphi_1'(\operatorname{tg} \theta)$

avec : $\varphi_1'(\operatorname{tg} \theta) = 4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta + 1$

$$\varphi''(\theta) = \frac{r \cdot X_0 \cdot \cos \alpha}{\cos^3 \theta} [4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta + 1]$$

Nous écrirons l'expression de ξ sous la forme d'une série qui en première approximation est équivalente :

$$\begin{aligned} \xi \approx & -\frac{8l}{\pi L^2} \sum_A^B \sec \theta' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}} \cdot [1 - e^{-X_0 \cdot \sec^2 \theta' \cdot c}] \cdot \cos\left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta')\right] \cdot h \cdot \Delta h \\ & - \frac{8l}{\pi L^2} \sum_A^B \sec \theta'' \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}} \cdot [1 - e^{-X_0 \cdot \sec^2 \theta'' \cdot c}] \cdot \cos\left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'')\right] \cdot h \cdot \Delta h \end{aligned}$$

Pour un point donné (x, y) , h varie de A à B avec un pas Δh .

Remarque : Quand la borne B est inférieure à $\frac{L}{2}$ nous aurons pour le dernier terme de la série :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{racine double})$$

$$\sec \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = 0$$

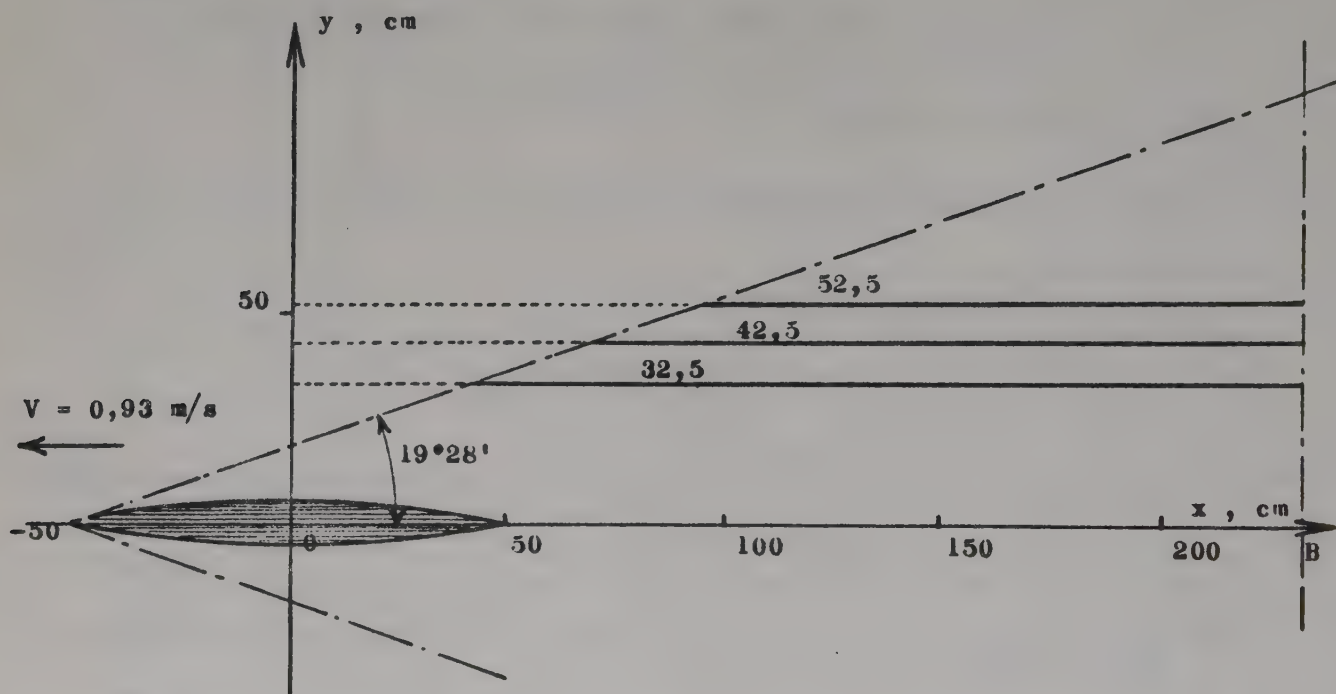
4°- Calcul numérique :

Notre méthode expérimentale nous donnant des valeurs de la dénivellation ξ pour des points distants de 5 cm, nous adopterons cette valeur pour le pas Δh .

Le calcul numérique sera fait sur l'ordinateur I.B.M. 650. Nous étudierons la dénivellation de la surface libre dans trois plans verticaux parallèles à l'axe de translation et distants respectivement de 32,5, 42,5 et 52,5 cm de l'axe.

Le phénomène étudié étant symétrique par rapport au plan de symétrie longitudinale, nous n'étudierons que la moitié du champ de vagues.

La configuration dans le plan de surface libre est alors la suivante :



Pour chaque ordonnée y , x varie comme nous l'avons montré précédemment de A à B. Pour tenir compte du champ intéressé par la mire la borne B est fixée à 230 cm.

Valeur de la borne A

y_0	A
32,5	50
42,5	75
52,5	105

Nous trouvons page suivante un tableau contenant les valeurs de ξ .

- DENIVELLATION -

Y = 32,5	
x , cm	Δ , cm
50	- 2,451
55	- 1,915
60	- 1,257
65	- 0,305
70	0,534
75	0,896
80	0,690
85	0,160
90	- 0,290
95	- 0,422
100	- 0,305
105	- 0,124
110	0,111
115	0,544
120	1,148
125	1,599
130	1,653
135	1,469
140	0,706
145	- 0,429
150	- 1,521
155	- 1,883
160	- 1,273
165	- 0,181
170	0,790
175	1,403
180	1,438
185	0,856
190	0,173
195	- 0,308
200	- 0,798
205	- 1,142
210	- 1,079
215	- 0,677
220	0,062
225	0,734
230	0,943

Y = 42,5	
x , cm	Δ , cm
75	1,702
80	1,947
85	1,763
90	1,133
95	0,325
100	- 0,325
105	- 0,576
110	- 0,395
115	- 0,017
120	0,502
125	0,963
130	1,107
135	0,938
140	0,315
145	- 0,877
150	- 1,361
155	- 1,746
160	- 1,852
165	- 1,707
170	- 1,227
175	0,408
180	1,338
185	1,584
190	1,106
195	0,099
200	- 0,883
205	- 1,351
210	- 1,240
215	- 0,736
220	- 0,049
225	0,546
230	0,844

Y = 52,5	
x , cm	Δ , cm
105	- 1,513
110	- 0,622
115	0,481
120	0,778
125	1,266
130	1,608
135	1,544
140	1,036
145	0,291
150	- 0,161
155	- 0,759
160	- 0,863
165	- 0,517
170	0,209
175	1,078
180	1,506
185	1,923
190	2,139
195	2,051
200	0,691
205	- 0,687
210	- 1,389
215	- 1,452
220	- 0,968
225	- 0,084
230	0,879

3.3 - APPLICATION DE LA METHODE =====

EXPERIMENTALE =====

Pour le schéma de montage se reporter à la 1^o partie.

CARACTERISTIQUES EXPERIMENTALES :

- Bassin d'essai : largeur : 2,70 m - hauteur : 2 m - longueur : 35 m .
- Distance du centre optique au plan d'eau : $d = 214,5$ cm .
- Profondeur d'immersion de la mire : $h = 63$ cm .
- Projection du centre optique sur la mire : ligne n° 12
colonne n° 16
- Vitesse de traction de la maquette au moment du cliché : 93 cm/s.
- Poids total de la maquette : 161,4 newtons .

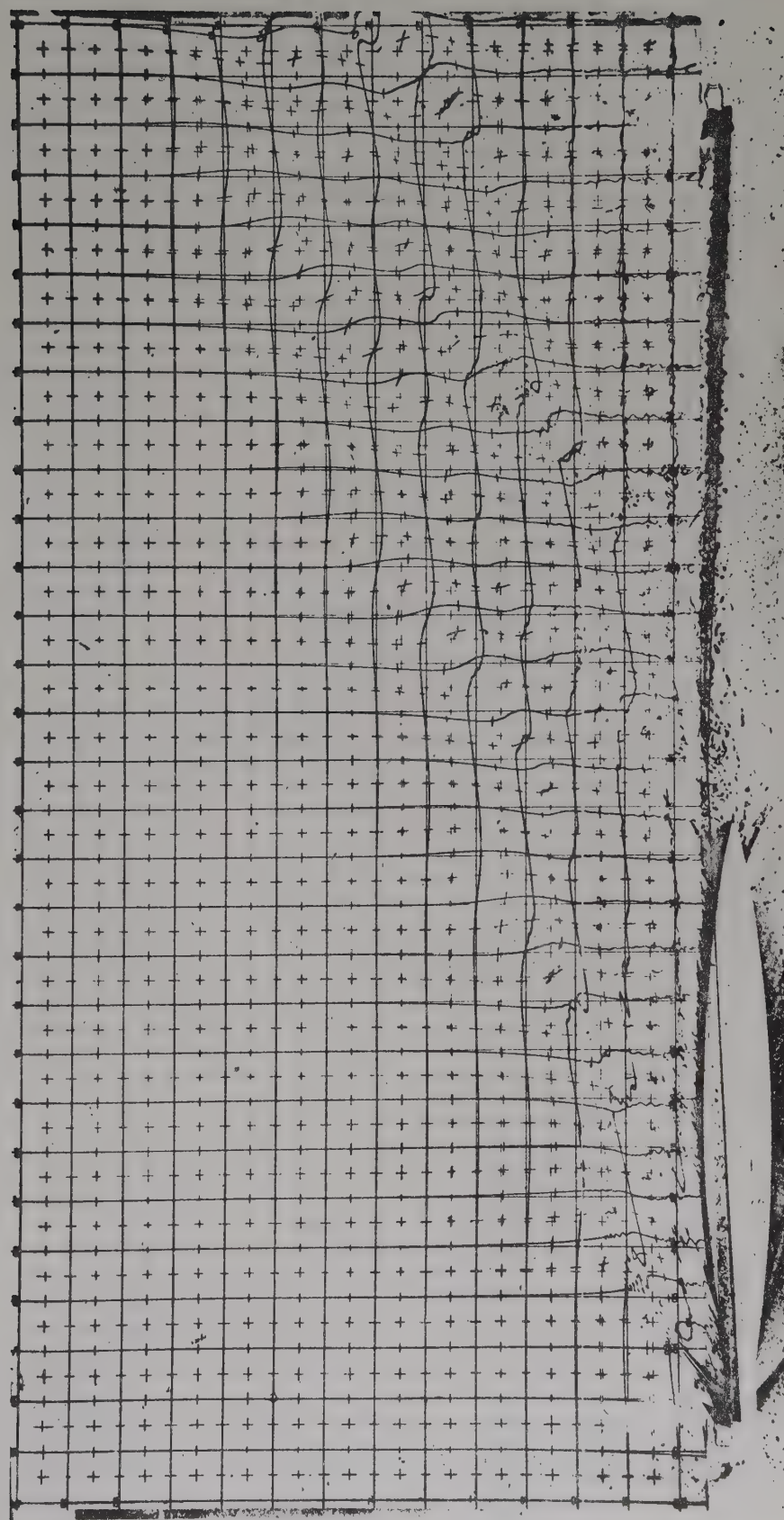
Nous trouvons page suivante l'image de la mire en présence du flotteur.

Le but de cette étude étant de comparer les résultats trouvés à ceux donnés par la méthode théorique, nous n'étudierons les déformations de la surface libre que dans des plans verticaux parallèles à l'axe de translation de la maquette. Les lignes de la mire qui seront exploitées porteront les repères : 10 , 11 et 12 .

Nous présentons successivement :

- les déplacements Δx pour les points considérés.
- les valeurs calculées pour les tangentes α_1 .
- les courbes représentatives de ces tangentes.
- les valeurs des dénivellations obtenues par intégration des courbes précédentes.

IMAGE DE LA MIRE EN PRESENCE DU FLOTTEUR

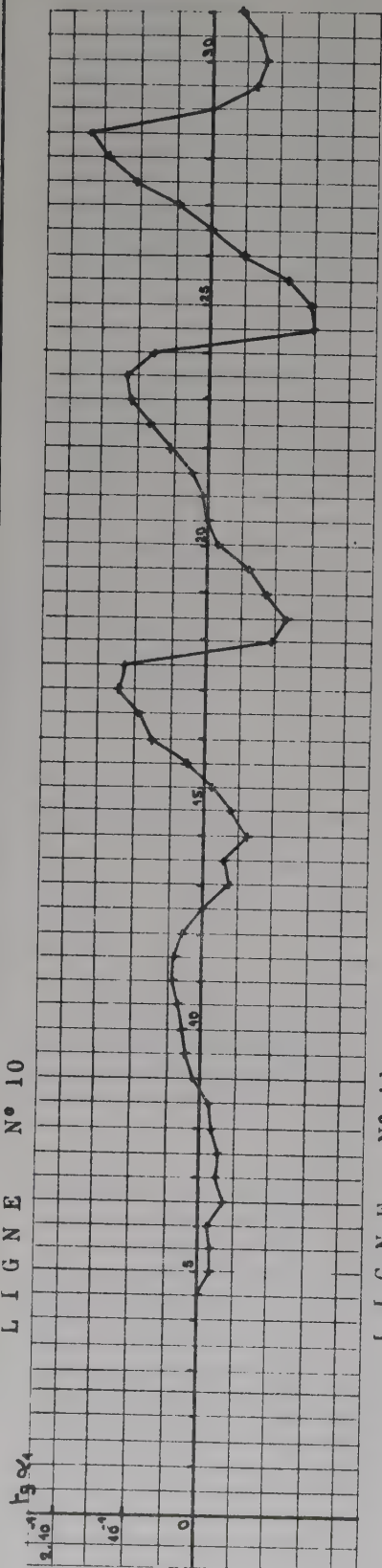


- VALEURS DES DEPLACEMENTS -

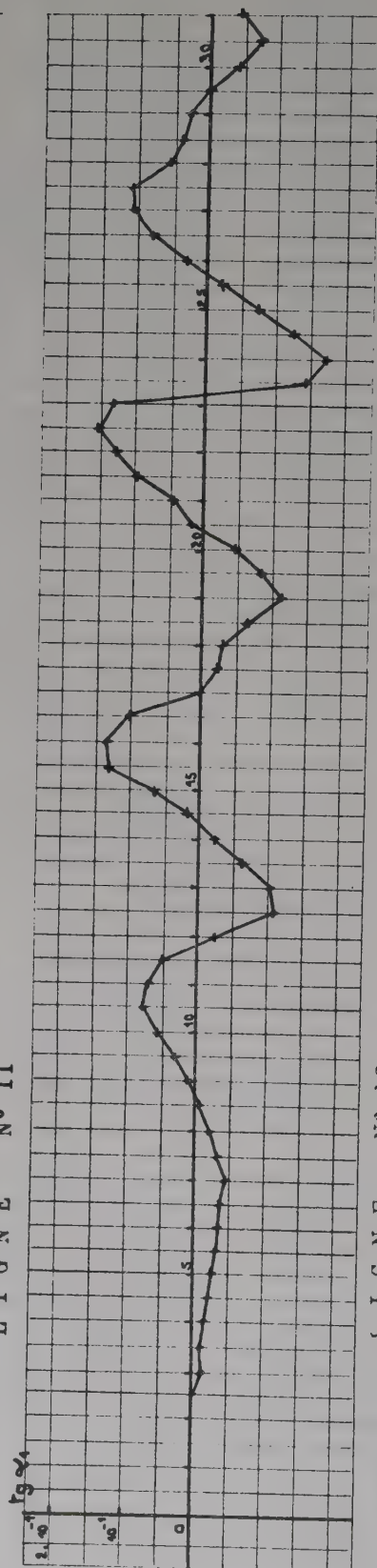
	Ligne p	Colon.n	Δx_n	Δx_{n+1}	Δx_{n+2}
RESEAU B	10	5	-51107	-50950	-51149
	10	8	-50920	50490	51149
	10	11	51226	51159	-51183
	10	14	-51320	-50560	51388
	10	17	51622	-51497	-51447
	10	20	-50930	50580	51292
	10	23	51605	51446	-51813
	10	26	-51288	51296	51872
	10	30	-51473	-51295	00000
	11	3	-50840	-51102	-51164
	11	6	-51202	-51236	00000
	11	9	51210	51290	51374
	11	12	-51136	-51536	-51130
	11	15	51328	51698	00000
	11	18	-51154	51596	-51236
	11	21	51260	51678	51712
	11	24	-51954	-51434	51166
	11	27	51602	51338	51138
	11	30	-51258	-51287	00000
	12	3	51102	-51120	00000
	12	5	-51212	-51402	-51390
	12	8	-50580	51357	51653
	12	11	-51487	-51416	-51120
	12	14	51196	51291	51408
	12	17	51569	-51772	-51534
	12	20	50560	51532	52102
	12	23	-51524	-51391	-50980
	12	26	50910	51334	51512
	12	30	-51369	00000	00000
RESEAU A	10	5	-49600	-51182	-51164
	10	8	-50640	51120	51177
	10	11	51209	00000	-51141
	10	14	-51213	51125	51499
	10	17	51592	-51575	-51309
	10	20	-51932	51135	51436
	10	23	51648	-51816	-51623
	10	26	00000	51626	52106
	10	29	-51396	-51433	00000
	11	3	-50720	-51122	-51178
	11	6	-51221	-51192	-51148
	11	9	51146	51402	51264
	11	12	-51586	-51336	50700
	11	15	51476	51514	-51134
	11	18	-51316	-51452	50680
	11	21	51498	51814	-51770
	11	24	-51692	-51117	51440
	11	27	51621	51220	00000
	11	30	-51452	00000	00000
	12	3	50700	-51142	00000
	12	5	-51296	-51473	-51270
	12	8	51162	51524	51656
	12	11	-51525	-51304	50560
	12	14	51216	51368	51482
	12	17	-51370	-51694	-51220
	12	20	51310	51796	52110
	12	23	-51390	-51242	00000
	12	26	51180	51420	51323
	12	29	-51198	-51415	00000

- TANGENTES α_1 -

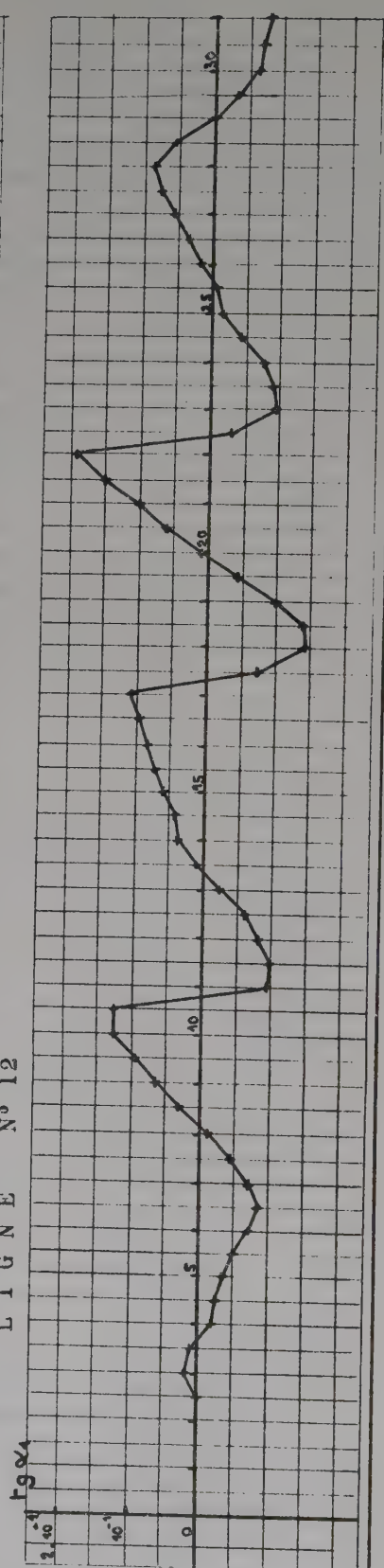
LIGNE N° 10



LIGNE N° 11



LIGNE N° 12



- DENIVELLATION Σ -

	L I G N E N = 10		L I G N E N = 11		L I G N E N = 12	
Colonne p	Σp	$\Sigma p+1/2$	Σp	$\Sigma p+1/2$	Σp	$\Sigma p+1/2$
3	-	-	- 0,034	- 0,096	0,041	0,111
4	-	-	- 0,167	- 0,261	0,089	- 0,021
5	- 0,045	- 0,136	- 0,381	- 0,527	- 0,170	- 0,388
6	- 0,220	- 0,341	- 0,691	- 0,876	- 0,691	- 1,073
7	- 0,486	- 0,625	- 1,078	- 1,269	- 1,704	- 1,998
8	- 0,740	- 0,810	- 1,425	- 1,487	- 2,145	- 2,098
9	- 0,817	- 0,739	- 1,462	- 1,298	- 1,859	- 1,450
10	- 0,619	- 0,462	- 1,094	- 0,769	- 0,899	- 0,283
11	- 0,272	- 0,066	- 0,403	- 0,090	- 0,204	- 0,222
12	0,108	0,184	- 0,030	- 0,375	- 0,664	- 1,008
13	0,097	- 0,059	- 0,912	- 1,341	- 1,211	- 1,242
14	- 0,281	- 0,538	- 1,556	- 1,585	- 1,120	- 0,920
15	- 0,669	- 0,702	- 1,391	- 0,907	- 0,674	- 0,359
16	- 0,453	- 0,022	- 0,242	0,347	0,015	0,449
17	0,521	1,109	0,598	0,532	0,960	1,055
18	1,155	0,636	0,392	0,164	0,537	- 0,166
19	0,143	- 0,221	- 0,275	- 0,780	- 0,759	- 1,116
20	0,414	- 0,458	- 1,111	- 1,192	- 1,196	- 1,021
21	- 0,431	- 0,319	- 1,036	- 0,678	- 0,621	- 0,005
22	- 0,119	0,220	- 0,127	0,568	0,854	1,218
23	0,700	1,274	1,272	1,241	0,865	0,403
24	1,772	1,576	0,445	- 0,309	0,010	- 0,317
25	0,737	0,192	- 0,820	- 1,068	- 0,448	- 0,509
26	- 0,214	- 0,340	- 1,048	- 0,783	- 0,481	- 0,383
27	- 0,214	0,179	- 0,334	0,189	- 0,153	0,114
28	0,809	1,617	0,595	0,829	0,621	0,936
29	2,060	1,894	0,879	1,035	1,629	1,083
30	1,539	1,172	0,931	0,644	0,824	0,580
31	0,881	-	0,348	-	-	-

3.4 - S Y N T H E S E

Nous représentons page suivante , sur un même graphique, les résultats obtenus par le calcul théorique et par la méthode expérimentale.

- 1 - Théoriquement la perturbation de la surface libre devrait être contenue à l'intérieur d'un dièdre d'arête verticale (à l'aplomb de l'étrave) et dont le plan bissecteur est confondu avec le plan longitudinal de symétrie de la maquette (le demi-angle d'ouverture est tel que : $\text{Arc tg } 1/2\sqrt{2} = 19^{\circ}28'$). L'expérience montre que la surface libre est perturbée en aval de la ligne théorique, l'écart étant d'une longueur d'onde environ.
- 2 - Les amplitudes sont du même ordre de grandeur.
- 3- La longueur d'onde est la même. Rappelons que la longueur d'onde théorique de la vague transversale est celle d'une houle trochôïdale de même vitesse que la maquette:

si V est la vitesse de la maquette, λ la longueur d'onde est donnée par :

$$\lambda = \frac{2\pi V^2}{g}$$

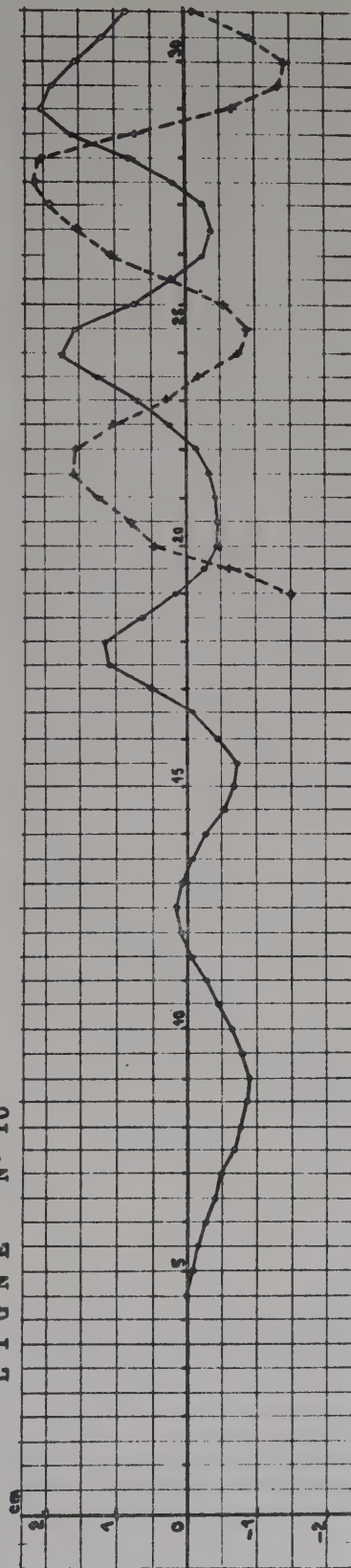
Dans l'essai : $V = 0,93 \text{ m/s}$, d'où : $\lambda = 0,554 \text{ m}$

- 4 - Nous observons un déphasage très net entre la vague théorique et la vague réelle. Il est cependant vraisemblable que si nous avions étudié un champ plus important derrière la maquette nous aurions observé la coïncidence progressive des deux vagues. Précisons ici que la grandeur de la mire est limitée par la largeur du bassin d'essai. En effet les réflexions des ondes sur les parois latérales du bassin viennent perturber le champ que l'on désire étudié.

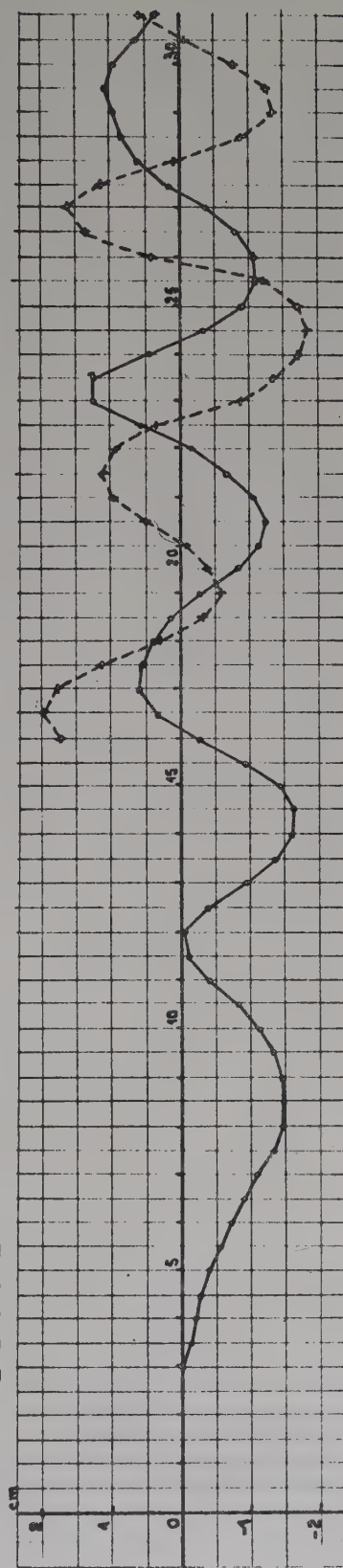
Remarque : Les courbes de dénivellation Σ données par le calcul théorique ne sont pas parfaitement continues : ceci résulte du pas Δh choisi.

(Les résultats obtenus par la méthode expérimentale sont représentés en trait continu et ceux obtenus par le calcul théorique en trait interrompu.)

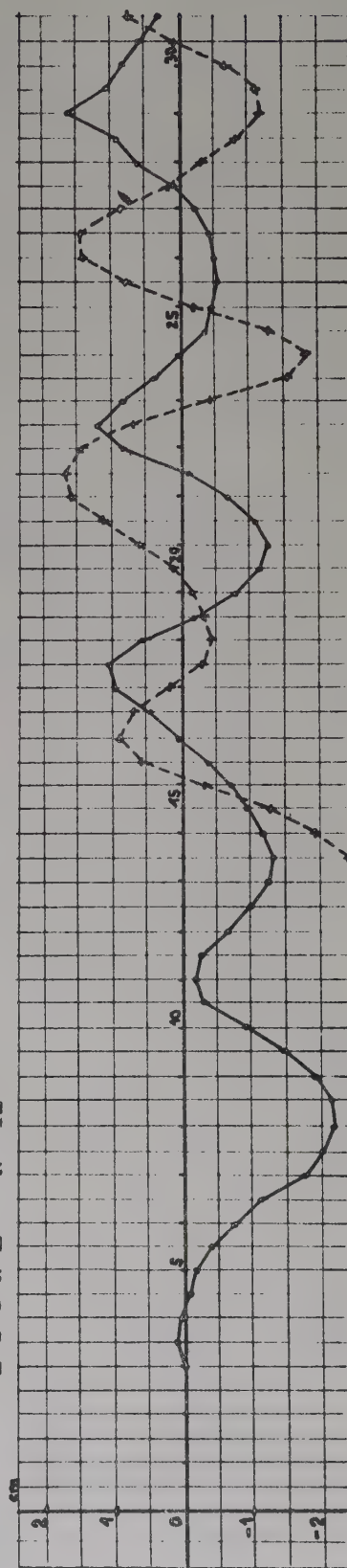
LIGNE N° 10



LIGNE N° 11



LIGNE N° 12



CHAPITRE IV

CHAMP DE VAGUES D'UN CYLINDRE D'AXE VERTICAL
ANIME D'UN MOUVEMENT DE TRANSLATION UNIFORME

4.1 - INTRODUCTION

=====

M. Brard,[6], propose un calcul de la dénivellation de surface libre pour une source. Nous avons suivi le même développement mais en l'appliquant à un doublet.

Pour étudier le champ de vagues d'un cylindre vertical animé d'un mouvement de translation uniforme, il nous a semblé intéressant de lui substituer une répartition de doublets. Nous avons essayé de trouver une condition d'équivalence à partir de l'expression du potentiel.

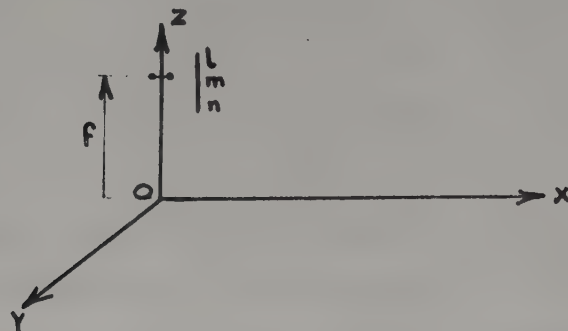
L'essai est effectué sur le bassin de 35 mètres. Le cylindre est fixé à un chariot dont le mouvement de translation est rigoureusement uniforme. Le cliché ci-dessous donne une vue du montage.



4.2 - ETUDE THEORIQUE

1°- Etude de la dénivellation ζ pour un doublet .

D'après LUNDE [7] , le potentiel d'un doublet en présence d'une surface libre est donné par :



$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{M}{r_1^3} [x.l + y.m + (z+f)n] - \frac{M}{r_2^3} [x.l + y.m + (f-z)n] \\ &+ \frac{i.K_0.M}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sec^2 \theta . d\theta \int_0^\infty \frac{l.\cos \theta + m.\sin \theta + i.n}{K - K_0.\sec^2 \theta + i.\mu.\sec \theta} . e^{\kappa[(z-f)+i\varpi]} . \kappa . d\kappa \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \varpi &= x.\cos \theta + y.\sin \theta \\ r_1^2 &= x^2 + y^2 + (z+f)^2 \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + (z-f)^2 \end{aligned} \right.$$

Dans cette relation M est le moment du doublet dont les cosinus directeurs sont : l , m et n .

Si V est la vitesse d'entrainement : $K_0 = -\frac{g}{V^2}$

μ est le coefficient introduit par CAUCHY et que l'on retrouve dans tous les problèmes analogues au problème traité ici.

Nous nous plaçons maintenant dans un cas particulier où les cosinus directeurs du doublet seront : l = 1 , m = 0 et n = 0 .

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= \frac{M.x}{[x^2 + y^2 + (z+f)^2]^{3/2}} - \frac{M.x}{[x^2 + y^2 + (z-f)^2]^{3/2}} \\ &+ \frac{i.K_0.M}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sec \theta . d\theta \int_0^\infty \frac{1}{K - K_0.\sec^2 \theta + i.\mu.\sec \theta} . e^{\kappa[(z+f)+i\varpi]} . \kappa . d\kappa \end{aligned} \right.$$

D'après l'approximation de POISSON, la dénivellation de surface libre ζ est donnée par :

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0}$$

Et en utilisant les axes Oxyz liés au doublet, nous avons :

$$\bar{z} = \frac{V}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{z=0}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{z=0} &= \left[\frac{i \cdot K_0 \cdot M}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sec \theta \cdot d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa[z+f+i\omega]} \cdot \kappa \cdot i \kappa \cdot \cos \theta \cdot d\kappa}{\kappa - K_0 \cdot \sec^2 \theta + i \mu \cdot \sec \theta} \right]_{z=0} \\ &= \left[\frac{-K_0 \cdot M}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa[z+f+i\omega]} \cdot \kappa^2 \cdot d\kappa}{\kappa - K_0 \cdot \sec^2 \theta + i \mu \cdot \sec \theta} \right]_{z=0} \\ &= -\frac{K_0 \cdot M}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa[i\omega+f]} \cdot \kappa^2 \cdot d\kappa}{\kappa - K_0 \cdot \sec^2 \theta + i \mu \cdot \sec \theta} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \bar{z} = -\frac{M}{\pi \cdot V} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa[i\omega+f]} \cdot \kappa^2 \cdot d\kappa}{\kappa - K_0 \cdot \sec^2 \theta + i \mu \cdot \sec \theta}$$

Nous remarquons que le changement de θ en $\theta + \pi$ équivaut à changer i en $-i$ dans l'intégrale. Nous écrirons :

$$(4) \quad \bar{z} = -\frac{2M}{\pi \cdot V} \operatorname{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{\kappa[i\omega+f]} \cdot \kappa^2 \cdot d\kappa}{\kappa - K_0 \cdot \sec^2 \theta + i \mu \cdot \sec \theta} \right]$$

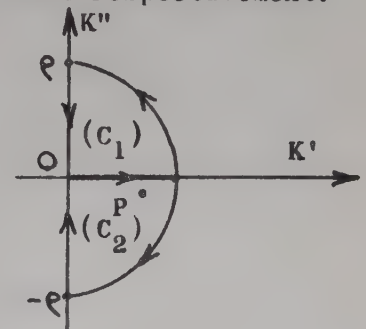
Pour calculer $\bar{z}$ il convient d'introduire la variable complexe :

$$K = K' + iK'' = \rho \cdot e^{i\psi}$$

et de considérer les contours fermés C_1 et C_2 constitués respectivement:

pour (C_1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{du segment } 0 < K' < \rho \text{ de l'axe réel} \\ \text{du quart de cercle } |K| = \rho, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2} \\ \text{du segment } \rho > K'' > 0 \text{ de l'axe imag.} \end{array} \right.$

pour (C_2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{du segment } 0 < K' < \rho \text{ de l'axe réel} \\ \text{du quart de cercle } |K| = \rho, \quad 0 < \psi < -\frac{\pi}{2} \\ \text{du segment } -\rho < K'' < 0 \text{ de l'axe imag.} \end{array} \right.$



La fonction à intégrer possède le pôle P défini par : $K = K_0 - i \mu$.

L'intégrale en K converge sur (C_1) pour $\omega > 0$ ou sur (C_2) pour $\omega < 0$.

Pour ρ suffisamment grand, P est situé à l'intérieur du quart de cercle du contour (C_2) .

Exprimons le résidu R_p :

$$R_p = e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta [i\omega + f]} \cdot K_0^2 \cdot \sec^4 \theta$$

Nous pouvons écrire :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{C_2} \dots dK = -2i\pi \cdot R_p \quad \text{Le signe - est introduit par le sens du parcours.}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{C_2} \dots dK = -2i\pi \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta [i\omega + f]} \cdot K_0^2 \cdot \sec^4 \theta$$

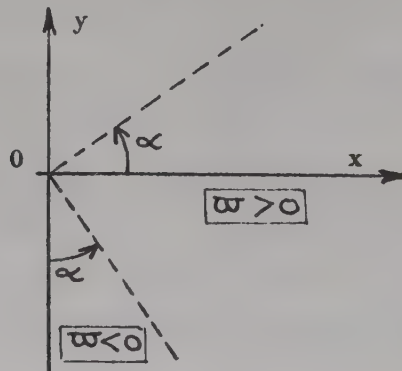
Pour $\boxed{\omega > 0}$ $\int_0^\infty \dots dK = \int_0^\infty \frac{-i \cdot e^{iK''[i\omega + f]} \cdot K''^2 \cdot dK''}{iK'' - K_0 \cdot \sec^2 \theta} = \int_0^\infty \frac{-e^{iK''[f + i\omega]} \cdot K''^2 \cdot dK''}{K'' + iK_0 \cdot \sec^2 \theta}$

Pour $\boxed{\omega < 0}$ $\int_0^\infty \dots dK = \int_0^\infty \frac{-i \cdot e^{iK''[i\omega + f]} \cdot K''^2 \cdot dK''}{iK'' - K_0 \cdot \sec^2 \theta} - 2i\pi K_0^2 \sec^4 \theta \cdot e^{[]}$

$$\int \dots dK = \int_0^\infty \frac{e^{-iK''[i\omega + f]} \cdot K''^2 \cdot dK''}{K'' - iK_0 \cdot \sec^2 \theta} - 2i\pi \cdot K_0^2 \cdot \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta [i\omega + f]}$$

Posons : $x + iy = r \cdot e^{i\alpha}$

En supposant : $0 \leq \alpha \leq \pi$, les valeurs de α étant paires par rapport à y , il vient :



$$\omega = r \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

$$\omega < 0 \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\omega > 0 \longrightarrow -\frac{\pi}{2} + \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$$

L'expression (4) donnant ζ s'écrit alors :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta = & - \frac{4 M g^2}{V^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta [i\omega + f]} \\ & - \frac{2 M}{\pi \cdot V} \operatorname{Re} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{m(\omega - if)} \cdot m^2 \cdot dm}{m - i K_0 \cdot \sec^2 \theta} \\ & + \frac{2 M}{\pi V} \operatorname{Re} \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{m(\omega + if)} \cdot m^2 \cdot dm}{m + i K_0 \cdot \sec^2 \theta} \end{aligned} \right.$$

Soit :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta = & - \frac{4 M g^2}{V^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot f \cdot \sec^2 \theta} \cdot \sin [K_0 \cdot \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \sin \theta)] \cdot d\theta \\ & - \frac{2 M}{\pi \cdot V} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{m\omega} \cdot [m \cdot \cos(mf) + K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot \sin(mf)] \cdot m^2 \cdot dm}{m^2 + K_0^2 \cdot \sec^4 \theta} \\ & + \frac{2 M}{\pi \cdot V} \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-m\omega} \cdot [m \cdot \cos(mf) + K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot \sin(mf)] \cdot m^2 \cdot dm}{m^2 + K_0^2 \cdot \sec^4 \theta} \end{aligned} \right.$$

2°- Etude de la fonction ζ dans le plan $z = 0$.

Lorsque r tend vers l'infini, les intégrales doubles en θ et m tendent rapidement vers zéro. Pour r grand, l'expression précédente se réduit alors à son premier terme.

$$(7) \quad \boxed{\zeta = - \frac{4 M \cdot g^2}{V^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\alpha} \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot f} \cdot \sin \underbrace{[K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)]}_{\varphi(\theta)} d\theta}$$

D'après le principe de phase stationnaire nous savons que les valeurs de θ apportant une contribution sensible dans le calcul de ζ sont celles qui sont solutions de :

$$\frac{d}{d\theta} [K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)] = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \theta} \right) = 0$$

$$\text{Soit : } \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha + 2 \sin^2 \theta \cdot \sin \alpha + \cos^2 \theta \cdot \sin \alpha = 0$$

Et en divisant par $\cos^2 \theta \cdot \cos \alpha$:

$$2 \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

Les solutions étant :

$$(8) \quad \boxed{\operatorname{tg} \theta'' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{4 \operatorname{tg} \alpha}}$$

L'expression (7) pourra s'écrire, avec une précision aussi grande que l'on veut :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{Z} = & - \frac{4 M g^2}{V^5} \int_{\theta'-\epsilon}^{\theta'+\epsilon} \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot F} \int_m \left\{ e^{i K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)} \right\} d\theta \\ & - \frac{4 M g^2}{V^5} \int_{\theta''-\epsilon}^{\theta''+\epsilon} \sec^4 \theta \cdot e^{K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot F} \int_m \left\{ e^{i K_0 \cdot \sec^2 \theta \cdot r \cdot \cos(\theta - \alpha)} \right\} d\theta \end{aligned} \right.$$

Développons suivant Taylor :

$$\varphi(\theta' + u) = \varphi(\theta') + \frac{u^2}{2} \varphi''(\theta') + \dots$$

$$\varphi(\theta'' + u) = \varphi(\theta'') + \frac{u^2}{2} \varphi''(\theta'') + \dots$$

$$\text{avec} \quad \varphi'(\theta') = \varphi'(\theta'') = 0$$

Nous pouvons écrire, en posant $\theta - \theta' = u$ dans la première intégrale et $\theta - \theta'' = u$ dans la seconde :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{Z} = & - \frac{4 M g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta' \cdot e^{K_0 \cdot F \cdot \sec^2 \theta'} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \int_m \left\{ e^{i \varphi(\theta' + u)} \right\} du \\ & - \frac{4 M g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta'' \cdot e^{K_0 \cdot F \cdot \sec^2 \theta''} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \int_m \left\{ e^{i \varphi(\theta'' + u)} \right\} du \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$A = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{\frac{i u^2}{2} \cdot \varphi''(\theta')} du$$

$$B = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{\frac{i u^2}{2} \cdot \varphi''(\theta'')} du$$

$$\text{avec : } u = \rho \cdot e^{i \chi}$$

$$A = e^{iX} \int_{-E}^{+E} e^{\frac{e^2}{2} \left[\cos(2X + \frac{\pi}{2}) + i \sin(2X + \frac{\pi}{2}) \right]} \cdot \psi''(\theta') \cdot d\varrho$$

$$B = e^{iX} \int_{-E}^{+E} e^{\frac{e^2}{2} \left[\cos(2X + \frac{\pi}{2}) + i \sin(2X + \frac{\pi}{2}) \right]} \cdot \psi''(\theta'') \cdot d\varrho$$

Nous remarquons ici que les signes de $\psi''(\theta')$ et $\psi''(\theta'')$ sont opposés; par exemple, nous supposons : $\psi''(\theta') > 0$ et $\psi''(\theta'') < 0$. Pour assurer la convergence des intégrales il faut prendre :

$$X = \frac{\pi}{4} \quad \text{dans } A$$

et

$$X = -\frac{\pi}{4} \quad \text{dans } B$$

Soit :

$$A = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-E}^{+E} e^{-\frac{e^2}{2} \cdot \psi''(\theta')} \cdot d\varrho$$

et

$$B = e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-E}^{+E} e^{\frac{e^2}{2} \cdot \psi''(\theta'')} \cdot d\varrho = e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-E}^{+E} e^{-\frac{e^2}{2} |\psi''(\theta'')|} \cdot d\varrho$$

Posons :

$$\frac{|\psi''(\theta)|}{2} = \alpha^2$$

Sachant que :

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \quad \text{pour } \alpha > 0, \text{ il vient :}$$

$$A = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\psi''(\theta')}} \cdot$$

et

$$B = e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\psi''(\theta'')}} \cdot$$

Portons ces valeurs dans l'expression (9).

$$\begin{aligned} \zeta = & - \frac{4 M \cdot g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta'} \int_m \left\{ e^{i \left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta') \right]} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(\theta')}} \right\} \\ & - \frac{4 M \cdot g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta'' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta''} \int_m \left\{ e^{i \left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'') \right]} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(\theta'')}} \right\} \end{aligned}$$

Soit enfin :

(10)

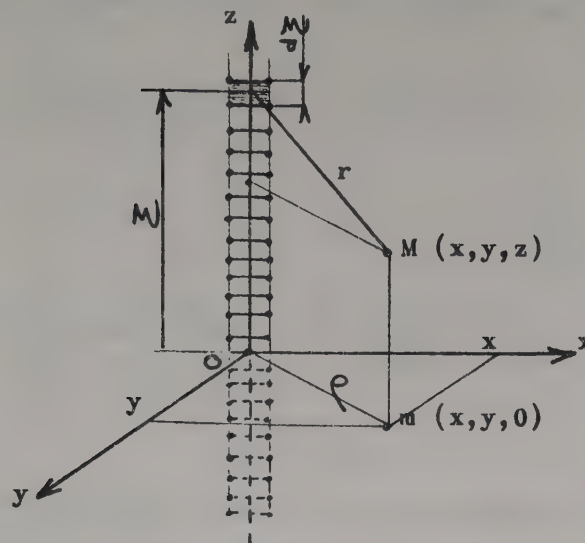
$$\begin{aligned} \zeta = & - \frac{4 \sqrt{2\pi} \cdot M \cdot g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta'} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi''(\theta')}} \cdot \sin \left[\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta') \right] \\ & - \frac{4 \sqrt{2\pi} \cdot M \cdot g^2}{V^5} \cdot \sec^4 \theta'' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta''} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\varphi''(\theta'')}} \cdot \sin \left[-\frac{\pi}{4} + \varphi(\theta'') \right] \end{aligned}$$

3°- Recherche d'une condition d'équivalence :

Considérons un doublet de moment dM centré sur l'axe Oz , d'axe parallèle à Ox . En mouvement absolu le potentiel dû à ce doublet est tel que :

$$d\phi = - \frac{dM \cdot x}{r^3}$$

$$\text{avec } r^2 = x^2 + y^2 + (z - \xi)^2$$



Supposons une répartition continue de doublets sur l'axe Oz ; le potentiel est donné par l'intégrale :

$$\phi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma \cdot x \cdot d\xi}{r^3} \quad \text{car} \quad \sigma = \frac{dM}{d\xi}$$

(Ceci est effectivement justifié puisque nous supposons une densité σ constante ce qui entraîne la condition : $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0$)

$$\phi = - \sigma \cdot x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{[x^2 + y^2 + (z - \xi)^2]^{3/2}}$$

$$\text{Posons: } x^2 + y^2 = \rho^2, \text{ avec } z - \xi = u$$

$$\phi = - \sigma \cdot x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[\rho^2 + u^2]^{3/2}}$$

$$\text{Sachant que : } \int \frac{du}{\sqrt{U^3}} = \frac{u}{\rho^2 \cdot \sqrt{U}}, \text{ avec } U = \rho^2 + u^2$$

d'où l'expression du potentiel :

$$\phi = - \sigma \cdot x \cdot \left[\frac{z - \xi}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}} \right]_{-L}^{+L}$$

Nous supposons une répartition continue de doublets sur l'axe des z de $-L$ à $+L$. Nous ferons tendre L vers l'infini par la suite.

$$\phi = - \frac{\sigma \cdot x}{\rho^2} \cdot \left[\frac{z + L}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2}} - \frac{z - L}{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2}} \right]$$

Et en divisant par L :

$$\phi = - \frac{\sigma \cdot x}{\rho^2} \cdot \left[\frac{\frac{z}{L} + 1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 + \left(\frac{z}{L} + 1\right)^2}} - \frac{\frac{z}{L} - 1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 + \left(\frac{z}{L} - 1\right)^2}} \right]$$

Nous obtenons une expression du potentiel dans laquelle interviennent les rapports $\frac{z}{L}$ et $\frac{\rho}{L}$. Si nous supposons le rapport $\frac{\rho}{L}$ faible il vient :

$$\phi = - \frac{2 \sigma \cdot x}{\rho^2}$$

(11)

$$\phi = - \frac{2 \sigma \cdot x}{x^2 + y^2}$$

Physiquement cela revient à supposer le rayon ρ faible devant la longueur L . Par exemple nous pourrions prendre le rapport $\frac{1}{10}$.

L'expression (11) est particulièrement intéressante car la variable z n'intervient plus. Nous avons un écoulement plan.

Nous remarquerons également que la valeur du potentiel intégré entre les bornes $-\infty$ et $+\infty$ n'est pas sensiblement différente de celle obtenue entre les bornes $-L$ et $+L$. Nous obtiendrons la valeur de ϕ avec une précision aussi grande que nous le voudrions : il suffira de prendre le rapport $\frac{\rho}{L}$ suffisamment faible.

Supposons maintenant que le système soit animé d'un mouvement rec-

tiligne uniforme de vitesse V , parallèle à Ox et de sens contraire. Nous écrirons l'expression du potentiel :

$$\psi = - \frac{2\sigma \cdot x}{x^2 + y^2} - V \cdot x$$

Cherchons la fonction courant ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{2\sigma (x^2 - y^2)}{[x^2 + y^2]^2} - V = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{4\sigma \cdot x \cdot y}{[x^2 + y^2]^2} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

$$d\psi = - \frac{4\sigma \cdot x \cdot y}{[x^2 + y^2]^2} dx + \frac{2\sigma (x^2 - y^2) - V \cdot [x^2 + y^2]^2}{[x^2 + y^2]^2} dy$$

Sur un cercle de rayon constant R , contenu dans le plan Oxy , avec :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

il vient :

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0$$

avec :

$$\boxed{d\psi = 0}$$

$$0 = \left[- \frac{4\sigma \cdot x \cdot y}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{2\sigma (x^2 - y^2) - V \cdot [x^2 + y^2]^2}{[x^2 + y^2]^2} \cdot \frac{x}{y} \right] \cdot dx$$

Soit en regroupant les termes :

$$0 = \left[2\sigma (x^2 + y^2) - V \cdot [x^2 + y^2]^2 \right] \cdot \frac{x \cdot dx}{y \cdot [x^2 + y^2]^2}$$

Nous pouvons considérer seulement la partie placée entre crochets :

$$2\sigma (x^2 + y^2) - V \cdot [x^2 + y^2]^2 = 0$$

d'où la valeur de la densité :

(12)

$$\boxed{\sigma = \frac{V \cdot R^2}{2}}$$

Conclusion : Par rapport au plan Oxy , notre répartition de doublets est équivalente à un cylindre d'axe Oz , de longueur L et de rayon R défini par la relation (12).

4°- Calcul de la fonction ξ :

En supposant une répartition continue de doublets, l'expression (10) permettant de calculer ξ pour un doublet élémentaire s'écrit immédiatement :

$$d\xi = - \frac{4\sqrt{2\pi} \cdot g^2}{v^5} \cdot \sec^4 \theta' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta'} \cdot \frac{1}{\sqrt{\psi''(\theta')}} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{4} + \psi(\theta')\right] \cdot dM$$

$$- \frac{4\sqrt{2\pi} \cdot g^2}{v^5} \cdot \sec^4 \theta'' \cdot e^{K_o \cdot f \cdot \sec^2 \theta''} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\psi''(\theta'')}} \cdot \sin\left[-\frac{\pi}{4} + \psi(\theta'')\right] \cdot dM$$

Dans un paragraphe précédent nous avons montré que :

$$dM = \sigma \cdot df$$

La densité σ est donnée par la relation (12) :

$$\sigma = \frac{v \cdot R^2}{2}$$

Nous obtiendrons l'expression générale de ξ en intégrant entre les bornes 0 et $-L$.

$$\xi = \int_0^{-L} \dots df$$

L'expression différentielle s'écrit :

$$d\xi = - \left[\frac{2\sqrt{2\pi} \cdot g^2 \cdot R^2}{v^4} \cdot \sec^4 \theta' \cdot \frac{1}{\sqrt{\psi''(\theta')}} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{4} + \psi(\theta')\right] \right] \cdot e^{\frac{g \cdot \sec^2 \theta' \cdot f}{v^2}} \cdot df$$

$$- \left[\frac{2\sqrt{2\pi} \cdot g^2 \cdot R^2}{v^4} \cdot \sec^4 \theta'' \cdot \frac{1}{\sqrt{-\psi''(\theta'')}} \cdot \sin\left[-\frac{\pi}{4} + \psi(\theta'')\right] \right] \cdot e^{\frac{g \cdot \sec^2 \theta'' \cdot f}{v^2}} \cdot df$$

d'où

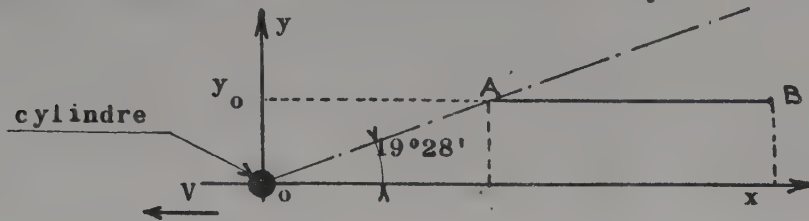
(13)

$$\xi = \frac{2\sqrt{2\pi} \cdot g \cdot R^2}{v^2} \cdot \frac{\sec^2 \theta'}{\sqrt{\psi''(\theta')}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{g \cdot L \cdot \sec^2 \theta'}{v^2}} \right] \cdot \sin\left[\frac{\pi}{4} + \psi(\theta')\right]$$

$$+ \frac{2\sqrt{2\pi} \cdot g \cdot R^2}{v^2} \cdot \frac{\sec^2 \theta''}{\sqrt{-\psi''(\theta'')}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{g \cdot L \cdot \sec^2 \theta''}{v^2}} \right] \cdot \sin\left[-\frac{\pi}{4} + \psi(\theta'')\right]$$

5° - Calcul numérique :

Pour effectuer le calcul numérique de la dénivellation Σ à partir de l'expression (13), il est nécessaire d'exprimer les différents termes en fonction des coordonnées x et y .



$\operatorname{tg} \theta$ est donnée par la relation (8), d'où $\sec \theta'$ et $\sec \theta''$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\varphi(\theta) = \frac{r \cdot g}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \cdot [1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta]$$

$$\varphi''(\theta) = \frac{r \cdot g}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \theta} \cdot [4 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta + 1]$$

Nous opérerons à des ordonnées y constantes (c'est à dire que nous étudierons les dénivellations Σ dans des plans verticaux parallèles à l'axe de translation confondu avec Ox), x variant de A à B.

Pour que l'équation donnant $\operatorname{tg} \theta$ (expression (8)) ait des solutions il faut que son discriminant soit positif :

$$\text{soit : } 1 - 8 \operatorname{tg}^2 \alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit immédiatement que pour une ordonnée constante y_0 ,

$$A = 2\sqrt{2} \cdot y_0$$

B est fixé arbitrairement à 295 cm.

Nous trouvons dans le tableau ci-après les résultats obtenus. Pour lire convenablement les valeurs numériques se reporter à la remarque importante page 45.

[illegible]

4.3 - APPLICATION DE LA METHODE

EXPERIMENTALE

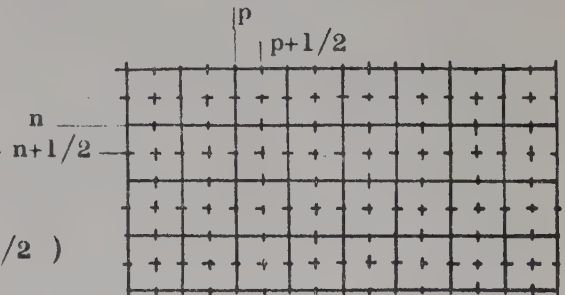
Pour le schéma de montage se reporter à la lère partie.

CARACTERISTIQUES EXPERIMENTALES :

- Bassin d'essai : largeur : 2,70 m - longueur : 35 m
profondeur : 2 m.
- Distance du centre optique au plan d'eau : 220 cm.
- Profondeur d'immersion de la mire : $h = 60$ cm.
- Projection du centre optique sur la mire : ligne n°12
colonne n° 16 1/2
- Vitesse de translation du chariot : 1,025 m/s .
- Diamètre du cylindre : 13 mm .
- Longueur immergée : 12 cm .

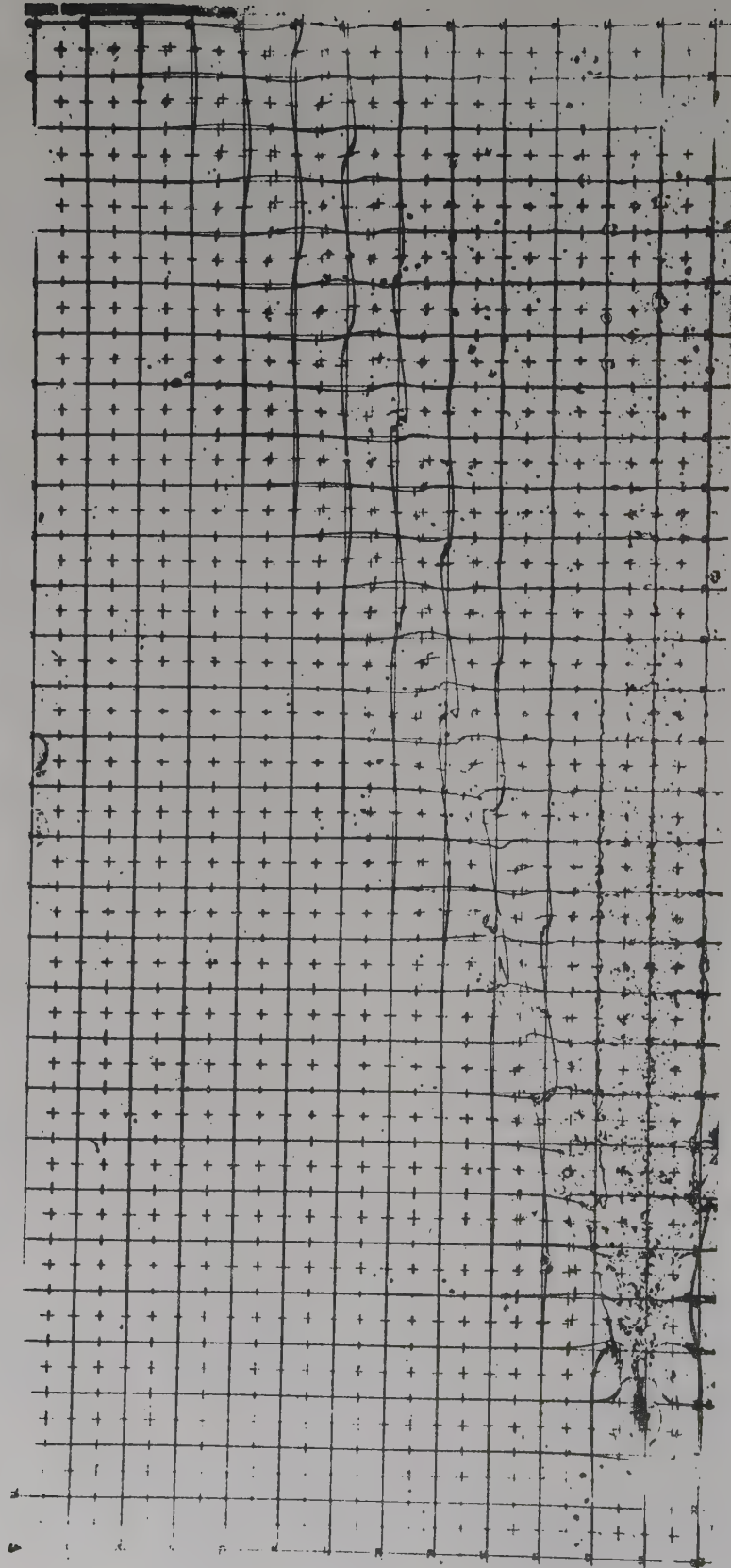
Par rapport à l'exposé de la méthode expérimentale nous avons réduit le pas du quadrillage de la mire de moitié . Afin d'utiliser le même programme de calcul nous avons distingué 4 réseaux pour lesquels le pas du quadrillage est de 10 cm .

- A : réseau (n, p)
- B : réseau ($n, p + 1/2$)
- C : réseau ($n + 1/2, p$)
- D : réseau ($n + 1/2, p + 1/2$)



Nous avons représenté sur un même graphique les variations des tangentes α_1 et α_2 pour l'ensemble des points de la mire . Nous obtenons ainsi une " image " de la surface libre. Rappelons que pour avoir les profils de cette surface libre il suffit d'intégrer les différentes courbes de $\text{tg } \alpha_1$ et de $\text{tg } \alpha_2$.

IMAGE DE LA MIRE EN PRESENCE DU CYLINDRE



DEPLACEMENTS ΔX ET ΔY

ligne n	colonne p		Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
2	25	1	000000	508600	000000	000000	000000	000000
2	27	1	000000	506600	000000	000000	000000	000000
2	31	1	000000	-511222	000000	000000	000000	000000
3	24	2	000000	511000	000000	509600	000000	000000
3	26	3	000000	511000	508100	009000	511222	000000
3	30	2	-511650	511400	-511980	-512180	000000	000000
4	23	2	-507000	508600	-509600	511740	000000	000000
4	25	3	000000	511600	508800	506600	511500	-511000
4	28	3	511114	-511112	-512200	511540	-513003	513000
4	31	1	000000	511200	000000	000000	000000	000000
5	18	1	000000	507000	000000	000000	000000	000000
5	22	3	-506900	509200	-511114	511560	-509700	511170
5	25	3	509000	507600	511910	-511280	511760	-511980
5	28	3	-512020	512320	-512780	513240	000000	506000
5	31	1	512570	-512680	000000	000000	000000	000000
6	15	3	000000	507600	000000	508600	000000	508000
6	18	3	000000	508600	507800	000000	506100	-506000
6	21	3	-506800	508600	-511820	502120	-511320	512220
6	24	3	511172	508000	512780	-511940	511750	-513100
6	27	3	-513440	514460	-511620	512780	506200	-511040
6	30	2	512620	-513460	-511420	000000	000000	000000
7	14	2	-506400	-506000	-507400	508600	000000	000000
7	16	3	-506800	511280	000000	511180	508600	000000
7	19	3	-511339	-511220	-506500	000000	-512850	513240
7	22	3	-511445	512800	509700	000000	513007	-512970
7	26	2	-512040	513600	000000	000000	000000	000000
7	28	3	511147	-507800	-511640	514700	000000	511420
7	31	1	512020	-512430	000000	000000	000000	000000
8	13	1	000000	504400	000000	000000	000000	000000
8	14	3	-511115	511320	-511290	511820	504500	511540
8	17	3	511170	-506800	512223	-512440	-508300	000000
8	20	3	-513950	515000	-511170	511650	512200	-512200
8	23	2	512730	-514200	-511133	514120	000000	000000
8	26	3	511580	-513820	-512080	512240	-506200	507400
8	29	3	000000	506000	000000	506800	511330	000000
9	07	2	000000	506600	000000	508600	000000	000000
9	09	3	000000	508600	506000	000000	509200	000000
9	12	3	000000	-503600	-511440	511220	-511720	512930
9	15	3	505200	511720	512490	-511440	513500	-514460
9	18	3	-513330	516080	-511138	509700	506600	-513180
9	21	3	-505440	511116	-509220	512560	511080	000000
9	24	3	511126	-511138	000000	511060	-511140	511150
9	27	3	-511132	000000	-509800	000000	-506600	000000
9	30	2	511142	000000	513360	000000	000000	000000
10	06	2	000000	509900	000000	506600	000000	000000
10	08	3	000000	511124	511102	511110	511193	-511100
10	11	3	506700	-512220	-513950	517000	-512810	514980
10	14	3	505600	-511080	513440	-514520	-511220	513750
10	17	3	-508200	511132	000000	-514960	-511131	512710
10	20	2	-505440	000000	000000	511280	000000	000000
10	23	3	507800	000000	000000	511138	000000	506800
10	26	3	-509200	000000	-507700	000000	-507800	506800
10	29	3	000000	000000	507000	000000	506800	000000
11	03	3	-511100	000000	-511111	511540	000000	513920
11	08	3	511179	511143	513520	-512070	-514760	516860
11	11	3	-511162	514112	511124	-511250	-508700	-513440
11	14	3	-507550	511164	-504600	000000	000000	511110
11	17	3	000000	511146	-511110	511114	000000	511130
11	20	3	000000	511110	000000	507800	511110	000000
11	23	2	000000	508400	508900	000000	000000	000000
11	26	3	-512006	000000	-511760	000000	000000	507200
11	29	1	000000	507200	000000	000000	000000	000000
12	03	1	511134	000000	000000	000000	000000	000000
12	04	3	-505440	-511154	-516360	518300	-512050	514590
12	07	3	513580	000000	515860	-514240	-512520	513020
12	10	3	-511860	512300	-512840	508400	-511180	511780
12	14	3	-508550	000000	-511410	000000	000000	000000
12	16	3	000000	511169	000000	000000	-508800	508200
12	20	2	-505700	000000	-511108	000000	000000	000000
12	23	2	000000	505600	000000	504800	000000	000000
12			000000	000000	000000	000000	000000	000000

DEPLACEMENTS ΔX ET ΔY

ligne n	colonne p+1/2		Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
2	25	2	000000	000000	000000	511000	000000	508600
2	27	1	000000	000000	000000	000000	000000	507800
3	24	2	000000	000000	000000	511200	000000	511200
3	26	3	000000	000000	509000	000000	511200	508200
3	29	2	-509800	000000	000000	512060	-512220	000000
4	22	3	000000	511600	-508400	511480	-509700	506800
4	25	3	000000	-511320	511620	000000	506900	511180
4	29	2	-512910	000000	000000	512520	-511800	512840
5	22	3	-511120	511460	000000	511980	-511200	511180
5	25	3	511290	-505400	000000	-511760	512530	000000
5	28	3	-513400	-511100	511360	512200	-511840	513640
6	15	3	000000	511060	000000	509200	000000	507200
6	21	3	-511190	511540	-504200	512500	-511720	511220
6	24	3	511500	511040	-511300	-512880	512880	-509000
6	27	3	-512920	-512680	511660	509600	-511710	514080
6	30	1	511140	000000	000000	000000	000000	-511920
7	14	2	-506600	000000	000000	511280	-505600	509200
7	16	3	502700	-507600	511160	505800	507100	511420
7	19	3	507800	513560	-512330	511720	-511800	-512380
7	22	3	000000	-513740	513100	-511560	511940	511710
7	25	3	-512490	-512430	000000	511740	511890	514700
7	29	2	-511160	000000	000000	-509200	511040	513200
8	13	1	-506300	000000	000000	000000	000000	507700
8	14	3	-509200	505600	508300	511880	-505300	511940
8	17	3	511980	513810	-513640	-512460	511720	-511420
8	20	3	-512610	-513860	512800	-509800	000000	513240
8	23	3	-511720	-512380	511140	512100	-504000	515800
8	26	3	-511900	-508800	000000	511860	-511650	512440
8	29	2	000000	000000	000000	000000	509800	511680
9	07	2	000000	000000	000000	508500	000000	506600
9	09	3	000000	-507400	000000	000000	508100	508400
9	13	2	-512220	000000	000000	513480	-511390	512620
9	15	3	511000	517500	512880	-512840	513500	509400
9	18	3	-512600	-513940	511380	-509400	-506400	513640
9	21	3	-508800	-511100	511110	509500	000000	512760
9	24	3	000000	511060	-511440	000000	-507400	511840
9	28	1	-509300	000000	000000	000000	000000	000000
9	30	1	504400	000000	000000	000000	000000	507400
10	06	2	000000	000000	000000	000000	000000	511260
10	08	3	000000	-511660	511760	000000	511280	511080
10	11	3	000000	511980	-511460	517580	-514860	-511340
10	14	3	511880	513850	511110	-518120	515710	-513120
10	17	3	000000	511600	-509200	000000	-505200	-507800
10	20	2	-503500	000000	000000	511320	000000	-511160
10	23	3	-505600	000000	507800	000000	511280	511060
10	26	3	-511480	507200	000000	511080	-511160	000000
10	30	1	505000	000000	000000	000000	000000	000000
11	05	3	-507400	511920	-509200	512610	-511260	511240
11	08	3	511500	516500	-514320	-514140	513040	000000
11	11	3	-512930	512670	-513050	-512880	-509500	511920
11	14	2	503100	000000	000000	511100	507500	000000
11	17	3	-508500	000000	-509300	506600	-511110	-503800
11	20	3	-509700	505800	506000	511080	-507800	509200
11	23	1	511240	000000	000000	000000	000000	507600
11	27	1	-511880	000000	000000	000000	000000	000000
12	02	2	508800	000000	000000	-511020	511100	000000
12	04	3	-511070	513410	000000	521050	-512300	000000
12	07	3	512540	511360	000000	514520	-511960	-513920
12	10	3	-512490	512060	-509200	511280	000000	508600
12	14	2	000000	000000	000000	511110	512320	511120
12	16	3	-507800	511360	504800	508800	000000	511140
12	19	3	000000	000000	000000	511140	-509400	505600
12	22	2	506100	000000	000000	000000	511000	503200
12	25	3	000000	000000	-511860	000000	-511440	000000
			000000	000000	000000	000000	000000	000000

DEPLACEMENTS ΔX ET ΔY

ligne $n + \frac{1}{2}$	colonne p		Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
2	25	2	000000	511120	000000	511102	000000	000000
2	27	2	000000	509800	000000	000000	000000	000000
2	31	1	-541500	000000	000000	000000	000000	000000
3	24	2	503200	511114	000000	511138	000000	000000
3	26	3	000000	511100	511116	-507000	511126	-509200
3	29	3	-506400	000000	-513900	512366	-511500	000000
4	23	2	-511126	511120	-511106	511178	000000	000000
4	25	3	000000	511126	511138	000000	512000	-511154
4	29	2	-513443	513300	-511162	512344	000000	000000
4	31	1	-511145	000000	000000	000000	000000	000000
5	18	1	000000	509000	000000	000000	000000	000000
5	22	3	511108	511121	-511169	512044	000000	511164
5	25	2	511154	000000	512666	-512222	000000	000000
5	28	3	-513337	514266	-511150	511186	511134	-511190
5	31	1	512844	000000	000000	000000	000000	000000
6	15	3	000000	507000	000000	511104	000000	511100
6	18	3	511136	505400	508200	-508800	506200	-511122
6	21	3	-511120	511123	-512111	512744	000000	511168
6	24	3	511198	-511122	513055	-513229	-511172	511178
6	27	3	-512336	512298	000000	000000	511177	-513112
6	30	1	-511158	514800	000000	000000	000000	000000
7	14	2	-504600	511122	-509300	511126	000000	000000
7	16	3	-504200	511152	504400	507400	511159	-511128
7	19	3	511136	-511182	-513066	512722	-512788	513354
7	22	3	501800	511114	512566	-512522	512112	-512779
7	25	3	-511168	514366	000000	000000	511159	-513844
7	28	3	-511199	512899	000000	504600	511110	-511104
7	31	1	509400	000000	000000	000000	000000	000000
8	13	1	-505400	506800	000000	000000	000000	000000
8	14	3	-511158	512116	-511106	512666	511112	505600
8	17	3	512668	512441	512223	-512622	-513668	-512999
8	20	3	-511171	512448	508000	-512118	512966	-515554
8	23	3	-508200	512822	511124	-509400	511102	-511102
8	26	3	511140	511156	-511140	000000	-511192	511138
8	29	3	000000	507800	509600	506600	505700	000000
9	07	2	000000	508800	000000	511130	000000	000000
9	09	3	000000	511110	509600	000000	509800	-511130
9	12	3	-506500	-506600	-513044	513222	-511142	512443
9	15	3	511170	-511122	514200	-514554	-512003	514557
9	18	3	-511126	511128	000000	-512223	-511136	512224
9	21	3	-511100	511110	507700	000000	511152	511116
9	24	3	501400	505400	000000	511116	-509600	000000
9	27	2	-511128	509000	-507300	000000	000000	000000
9	30	1	-511104	000000	000000	000000	000000	000000
10	06	2	000000	511113	-508200	511158	000000	000000
10	08	3	000000	511170	511154	000000	512644	-511184
10	11	3	-515600	521101	-514066	514200	000000	-511184
10	14	3	512622	-515115	502900	513116	502400	511124
10	17	3	-507000	000000	-501800	000000	-506800	511124
10	20	3	-505000	509600	-506400	000000	506900	000000
10	23	2	508600	000000	000000	-506200	000000	000000
10	26	3	-507800	000000	-511100	000000	-509600	000000
10	30	2	511104	000000	505800	000000	000000	000000
11	03	2	506500	000000	-506200	000000	000000	000000
11	05	3	-511145	511130	-511166	514442	000000	512550
11	08	3	513110	-511176	-511168	519600	-512822	513772
11	11	3	-505600	-511131	000000	000000	000000	509000
11	14	3	511168	506200	000000	511161	511194	505900
11	17	3	508400	000000	-511147	509600	-511112	505000
11	20	3	-511128	509000	-508200	508600	-506200	000000
11	26	2	-511162	000000	-511114	000000	000000	000000
12	03	1	512008	000000	000000	000000	000000	000000
12	04	1	-516544	000000	000000	000000	000000	000000
12	12	1	511176	000000	000000	000000	000000	000000
			000000	000000	000000	000000	000000	000000

DEPLACEMENTS ΔX ET ΔY

ligne $n + \frac{1}{2}$	colonne $p + \frac{1}{2}$		Δx_1	Δy_1	Δx_2	Δy_2	Δx_3	Δy_3
2	25	2	00000	50940	00000	51100	00000	00000
2	30	2	-50870	-50860	00000	00000	00000	00000
3	23	3	-50690	50960	00000	51128	00000	00000
3	26	3	51170	50920	51134	-50640	-50800	51142
3	29	2	-51188	51132	-51204	51278	00000	-50840
4	22	3	-50800	50870	-51103	51152	-50580	00000
4	25	3	50670	50970	51140	-51102	51160	51252
4	28	3	-51241	51162	-51302	51328	-50920	-51154
5	21	1	-50660	50720	00000	00000	00000	51106
5	22	3	-50480	51184	-51118	51206	00000	00000
5	25	3	51230	-51144	51199	-51222	-51294	50800
5	28	3	-51258	51434	00000	00000	51276	51344
6	15	3	00000	50840	00000	51126	-50360	-51324
6	18	3	50810	00000	50660	-51102	-50680	50970
6	21	3	-51232	51254	-51136	51266	-51184	50520
6	24	3	51262	-51250	51174	-51188	-51254	00000
6	27	3	-51120	51164	50980	-51202	50780	51428
6	30	1	-50970	51382	00000	00000	00000	-51158
7	13	3	00000	50400	-50950	51116	-50760	00000
7	16	3	00000	51114	51117	-50420	-51181	51174
7	19	3	-50380	-50700	-51354	51396	-51161	-51184
7	22	3	51140	-51182	51335	-51384	-51166	51244
7	25	3	-51100	51202	50840	-51252	-51198	51498
7	28	3	51124	51144	50860	-51112	50980	51301
8	13	1	-51100	51164	00000	00000	00000	51134
8	14	3	-51148	-51242	00000	51168	51206	00000
8	17	3	51304	-51293	-51330	51417	-51289	-51180
8	20	3	-50520	00000	51224	-51442	-51108	51390
8	23	3	50520	51122	51138	-51210	-51110	51416
8	26	3	-51180	50660	-51126	-50880	-50940	-51192
8	30	1	50940	00000	00000	00000	-50940	51132
9	06	3	00000	-50200	00000	00000	00000	00000
9	09	3	50680	50830	51104	51160	00000	51122
9	12	3	-51208	51242	-51304	-50860	50910	-51108
9	15	3	51297	-51216	51498	51388	-50220	50720
9	18	3	-50590	-50870	50520	-51360	-51198	51343
9	21	2	00000	50580	50500	-51230	-51104	51218
9	24	3	51110	50860	50820	00000	00000	00000
9	27	3	-51132	00000	-51120	00000	-51104	51134
9	30	1	51102	-50580	00000	00000	51106	00000
10	05	3	00000	50840	-50900	00000	00000	00000
10	08	3	50790	50540	51228	51173	-50250	51154
10	11	3	-51493	51770	-51176	-51116	51232	-51283
10	14	3	51322	-51326	50180	51102	51144	-51354
10	17	3	-50630	51136	-50900	51238	50990	-51114
10	20	2	00000	51132	-50600	00000	-50500	00000
10	23	3	00000	51114	50960	51144	00000	00000
10	26	2	-51152	00000	-51102	50640	00000	50750
10	30	1	50700	00000	00000	00000	00000	00000
11	03	2	50560	00000	-50780	00000	00000	00000
11	05	3	-51228	51243	-51144	00000	00000	00000
11	08	3	51506	-51632	-51388	51432	51148	-51130
11	11	3	00000	-51354	-50650	51608	-51197	50940
11	14	3	50900	51164	50800	00000	00000	51132
11	17	3	-51146	51126	-50433	-50420	-50820	00000
11	20	3	51100	50620	00000	50400	-51134	50620
11	26	2	-50920	00000	-51180	00000	51204	50610
11	30	1	00000	50980	00000	00000	00000	00000
12	02	2	51104	00000	51378	00000	00000	00000
12	12	1	-51178	00000	00000	-51310	00000	00000
			00000	00000	00000	00000	00000	00000

VALEURS DES TANGENTES (RESEAU A)

N° ligne p	N° colonne n	TANGENTE α_1						TANGENTE α_2							
		n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	n + 5	n + 6	n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	n + 5	n + 6
2	19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49147
2	26	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49196	00000
3	23	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
3	30	-49269	-49331	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49364	00000	00000	00000	00000	00000
4	20	00000	00000	00000	-49129	-49175	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
4	27	00000	49194	00000	-49505	00000	00000	00000	-49184	-49191	49260	00000	49198	00000	00000
5	17	00000	00000	00000	00000	00000	-49131	-49214	00000	49135	00000	00000	00000	49175	49293
5	24	-49180	49167	49342	49310	-49353	-49479	00000	49316	49141	-49229	-49349	49405	49558	48994
5	31	49422	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49440	00000	00000	00000	00000	00000	00000
6	14	00000	00000	00000	00000	00000	49154	49119	00000	49149	49169	49157	49169	00000	-49117
6	21	-49132	-49352	-49251	49327	49512	49319	-49622	49167	48410	49423	49152	-49357	-49565	49806
6	28	-49288	49107	49444	-49237	00000	00000	00000	00000	-49179	-49587	00000	00000	00000	00000
7	11	00000	00000	00000	-49126	-49147	-49135	00000	00000	00000	00000	-49118	00000	49255	49235
7	18	49171	-49277	-49128	-49550	-49282	49187	-49111	00000	-49243	00000	-49137	49545	00000	-49561
7	25	00000	-49379	00000	49258	-49251	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	48872	49264
8	08	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49230	00000	00000	00000	00000	00000	50100	49327
8	15	-49259	48905	49342	49448	-49166	-49790	-49336	49366	49309	-49137	-49482	00000	49410	49132
8	22	49430	49528	-49256	00000	49234	-49381	-49111	-49430	-49812	49795	00000	00000	00000	00000
8	29	00000	00000	49227	00000	00000	00000	00000	49106	49119	00000	00000	00000	00000	00000
9	05	00000	00000	00000	00000	00000	49117	49179	00000	00000	49123	49168	49165	00000	00000
9	12	00000	-49280	-49346	49105	49505	49708	-49366	-48712	49244	49590	49347	-49284	-49903	49674
9	19	-49278	49132	-49107	-49182	49211	49243	00000	49196	-49638	49231	49507	00000	-49266	49204
9	26	-49263	-49242	-49174	-49113	49283	49566	00000	49282	00000	00000	00000	00000	00000	00000
10	02	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49122	49236
10	09	49196	49376	49132	-49788	-49565	49113	49691	49222	-49210	-49435	50139	50100	-49218	-49918
10	16	-49248	00000	00000	-49266	-49109	00000	00000	49764	49269	50100	49550	00000	49257	00000
10	23	49152	00000	00000	-49173	-49139	-49141	00000	00000	49270	49132	00000	00000	49123	00000
10	30	49115	49114	00000	00000	00000	00000	-49174	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
11	06	-49204	00000	49339	49679	-49929	-49321	49247	49283	49738	49271	-49399	50133	49816	-49249
11	13	-49175	-48938	49218	00000	00000	-49224	00000	-49684	49332	00000	49224	49298	49232	49265
11	20	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49132	00000	49166	00000	00000	00000
11	27	-49325	00000	00000	00000	00000	00000	-49485	00000	49132	00000	49847	00000	00000	49581
12	03	49226	-48962	-50114	-49378	49665	50111	00000	49449	-49274	49351	00000	00000	00000	49345
12	10	-49363	-49558	-49299	00000	-49172	-49287	00000	00000	49165	49351	00000	00000	00000	49111
12	17	00000	-49180	00000	-49115	-49217	00000	00000	00000	49106	00000	00000	00000	00000	00000
12	24	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	48940	00000	00000	00000	00000	00000	00000

VALEURS DES TANGENTES (RESEAU B)

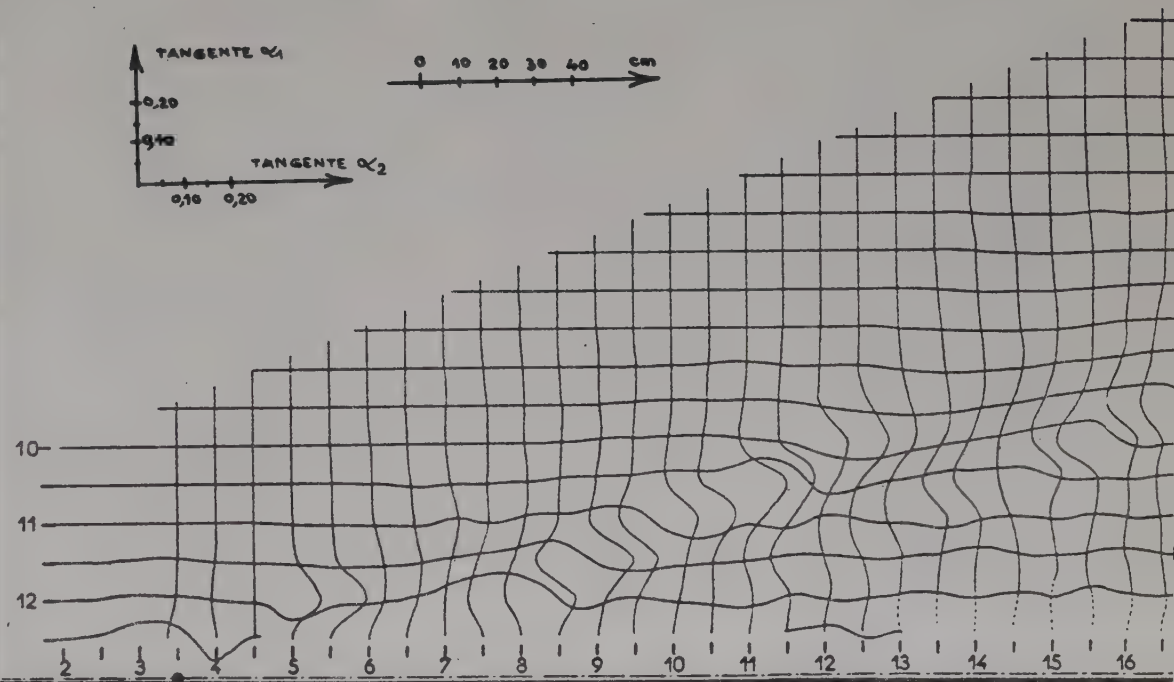
N° ligne P	N° colonne n + 1/2	TANGENTE α ¹										TANGENTE α ²									
		n + 1/2	n + 3/2	n + 5/2	n + 7/2	n + 9/2	n + 11/2	n + 13/2	n + 1/2	n + 3/2	n + 5/2	n + 7/2	n + 9/2	n + 11/2	n + 13/2						
2	19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49147						
2	26	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49171	49127	00000	00000	00000	00000	00000						
3	23	00000	00000	00000	00000	00000	49148	-49161	00000	49214	49210	49142	00000	00000	00000						
3	30	-49358	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49332	00000	00000	00000	00000	00000						
4	20	00000	00000	00000	-49177	-49151	00000	49116	00000	49126	00000	00000	00000	00000	00000						
4	27	49277	00000	-49485	-49295	00000	00000	00000	-49226	00000	00000	00000	49271	49288	49209						
5	17	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49474	00000	00000						
5	24	00000	49232	49446	00000	00000	-49210	-49223	49269	00000	00000	00000	00000	00000	49222						
5	14	00000	00000	00000	00000	00000	-49310	00000	00000	-49310	00000	00000	00000	00000	49368						
5	21	-49229	-49328	-48794	49276	49523	-49233	-49519	49141	00000	-48943	00000	00000	00000	-49179						
6	28	-49294	49232	49190	00000	00000	-49310	00000	49234	49476	49291	00000	00000	00000	00000						
7	11	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49165	00000	00000	00000	00000	00000						
7	18	49230	49153	00000	-49131	00000	49367	49578	00000	-49456	00000	00000	49183	49255	49186						
7	25	-49463	49348	00000	-49454	00000	49173	00000	-49151	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
8	8	00000	00000	00000	00000	00000	-49126	-49184	00000	49874	49320	00000	00000	49558	-49295						
8	15	-49106	49167	00000	49344	-49728	-49518	00000	00000	00000	-49443	00000	00000	00000	-49153						
8	22	49541	-49332	-48763	49212	-49349	-49297	00000	49378	00000	00000	00000	00000	49390	49392						
8	29	00000	49163	00000	00000	00000	00000	00000	-49746	50112	49400	-49444	49448	49643	-49156						
9	5	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49296	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
9	12	00000	-49447	00000	00000	00000	49158	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
9	19	-49128	49274	-49174	49202	49709	49515	-49526	00000	49125	49704	49190	-49575	50134	-49146						
9	26	-49265	00000	-49164	00000	49213	00000	-49138	-49189	49547	-49784	49186	-49212	49354	49736						
10	02	00000	00000	00000	00000	48763	00000	00000	49195	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
10	09	49248	49347	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
10	16	49168	00000	-49105	-49977	-49295	49382	50116	00000	00000	-49328	00000	49325	49362	49208						
10	23	-49109	49244	49147	-49271	-49211	00000	00000	49584	-49158	00000	00000	-49634	49263	00000						
10	30	48769	00000	00000	00000	00000	00000	-49136	00000	00000	00000	00000	-49233	49263	00000						
11	36	-49236	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49206	00000	00000	00000	00000	49196	00000						
11	13	-49518	48629	-49153	00000	-49853	-49584	-49191	00000	00000	00000	00000	00000	49128	00000						
11	20	-49195	-49155	49118	00000	-49173	-49226	-49188	49541	49366	00000	-49812	50128	49382	49228						
11	27	-49341	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49185	00000	00000	00000	-48776	49134	-49579						
12	03	-49193	-49187	-49425	00000	00000	00000	49146	00000	49215	49114	49148	00000	00000	00000						
12	10	-49490	00000	00000	00000	00000	-49378	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
12	17	00000	48979	00000	00000	00000	49283	-49159	49169	00000	50194	49642	-49748	49873	49267						
12	24	00000	00000	-49267	-49338	00000	49120	49194	49180	49256	49113	00000	49229	49135	49233						
							00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						

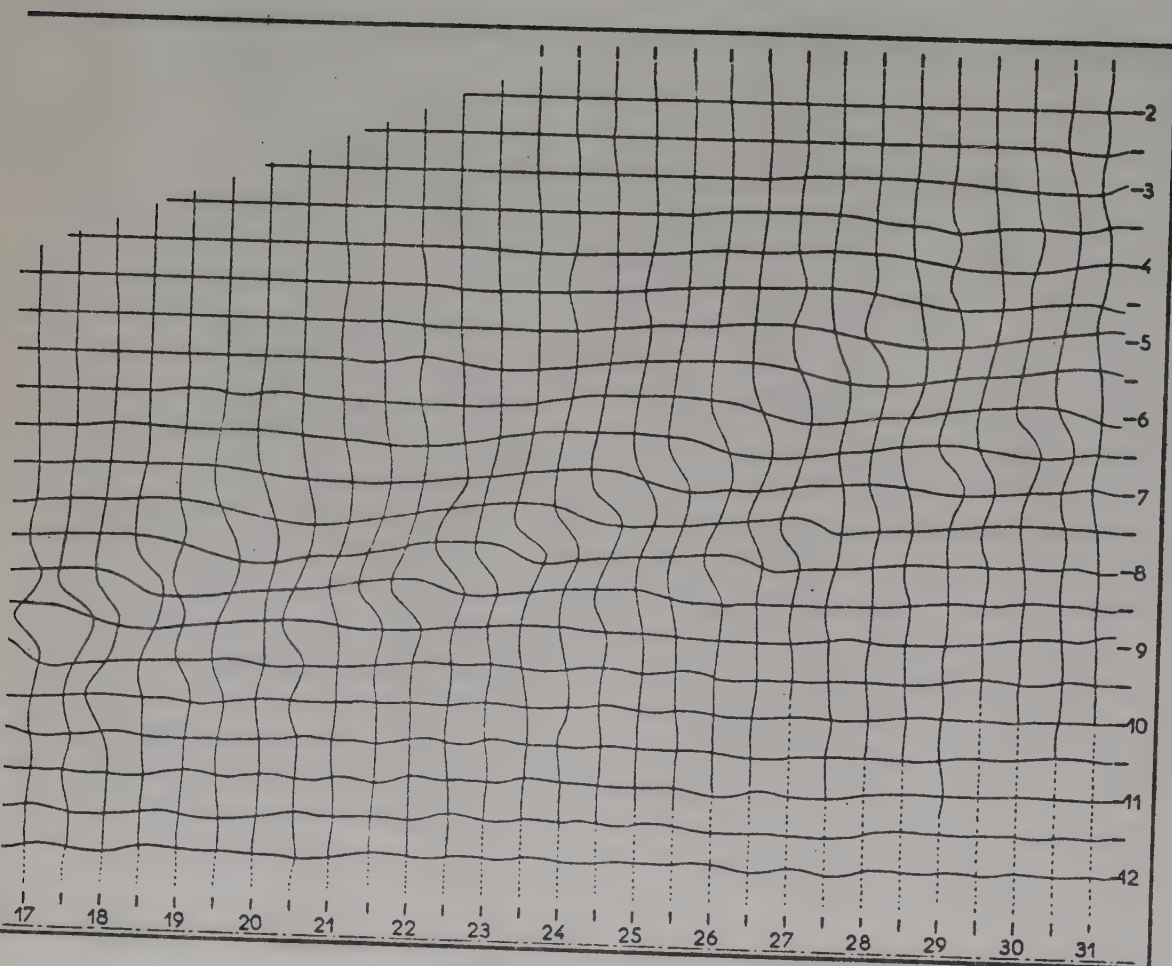
VALEURS DES TANGENTES (RESEAU C)

N° ligne p + 1/2	N° colonne n	TANGENTE α_1						TANGENTE α_2							
		n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	n + 5	n + 6	n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	N + 5	n + 6
2	19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49214
2	26	00000	00000	00000	00000	00000	-52146	00000	49180	49170	00000	00000	00000	00000	00000
3	23	00000	48591	00000	00000	00000	49214	-49107	00000	49210	49251	49177	-49121	-49156	00000
3	30	-49650	-49246	00000	00000	00000	00000	00000	49393	00000	00000	00000	00000	00000	00000
4	20	00000	00000	00000	-49237	-49197	00000	49249	00000	00000	00000	49225	49331	49232	00000
4	27	49353	00000	-49590	-49274	-49240	00000	00000	-49271	00000	49567	49395	00000	00000	00000
5	17	00000	00000	00000	00000	00000	49209	-49322	00000	49177	00000	00000	00000	49388	00000
5	24	00000	49285	49482	00000	-49599	-49260	49227	49311	00000	-49403	00000	49757	49323	-49322
5	31	49472	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
6	14	00000	00000	00000	00000	49272	49162	49122	00000	49138	49207	49159	49108	-49174	-49240
6	21	-49235	-49411	00000	49375	49568	-49317	-49430	49241	49533	49325	-49231	-49613	49329	49543
6	28	00000	49310	-49276	00000	00000	00000	00000	00000	-49547	49839	00000	00000	00000	00000
7	11	00000	00000	00000	-48920	-49187	-48845	48886	00000	00000	00000	49244	49253	49305	49149
7	18	49319	49272	-49611	-49551	48355	49495	49405	-49257	-49364	49543	49702	49224	-49487	-49553
7	25	-49320	00000	49292	-49360	00000	49188	49157	49831	00000	-49705	49523	48830	-49178	00000
8	08	00000	00000	00000	00000	00000	-49108	-49318	00000	00000	00000	00000	00000	49136	49435
8	15	-49214	49227	49544	49451	-49744	-49344	49159	49538	49113	49489	-49530	-49605	49498	-49434
8	22	49583	-49161	49238	49194	49265	-49256	-49347	-50109	49554	-49540	-49154	49295	00000	49249
8	29	00000	49167	48943	00000	00000	00000	00000	49137	49114	00000	00000	00000	00000	00000
9	05	00000	00000	00000	00000	00000	49186	49193	00000	00000	49162	49248	49213	00000	-49257
9	12	-49129	-49611	-49287	49345	49855	-49245	-49256	-49131	49647	49492	-49248	-49924	49552	49250
9	19	00000	-49274	-49200	49152	49299	48274	00000	-49452	49452	49220	00000	49228	49105	49224
9	26	-49181	-49235	-49130	00000	-49178	00000	00000	00000	49165	00000	00000	00000	00000	00000
10	02	00000	00000	00000	00000	00000	-49153	00000	00000	00000	00000	00000	49207	49295	49325
10	09	49295	49516	-50110	-49809	00000	49531	48591	00000	-49359	50159	49837	-49330	-50104	49644
10	16	48490	-49143	-48367	-49138	-49101	-49128	49137	49253	00000	00000	49252	49194	00000	00000
10	23	49169	00000	00000	-49147	-49182	-49173	00000	00000	-49121	00000	00000	00000	00000	00000
10	30	49180	48985	00000	00000	49105	-49103	-49260	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49233
11	06	-49306	00000	49588	-49325	-49550	-49111	00000	49816	49471	-49334	50185	49726	-49259	00000
11	13	00000	49340	00000	49290	49172	-49300	-49228	49181	49125	-49328	48883	00000	49156	49101
11	20	-49259	-49165	-49123	00000	00000	00000	-49305	49182	49173	00000	00000	00000	00000	00000
11	27	-49211	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
12	03	49355	-50113	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
12	10	00000	00000	49350	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000

N ^o ligne p + I/2	N ^o colonne n + I/2	TANGENTE α 1										TANGENTE α 2									
		n + I/2	n + 3/2	n + 5/2	n + 7/2	n + 9/2	n + II/2	n + I3/2	n + I/2	n + 3/2	n + 5/2	n + 7/2	n + 9/2	n + II/2	n + I3/2						
2	19	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49166						
2	26	00000	00000	00000	00000	-49143	00000	00000	00000	00000	00000	00000	-49142	00000	00000						
3	23	-49125	00000	00000	49304	49229	-49138	00000	49174	00000	00000	00000	-49145	00000	00000						
3	30	-49334	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49175	49233	00000	00000	00000	00000	49218						
4	20	00000	00000	00000	-49191	-49107	49122	00000	49455	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
4	27	49278	-49412	-49510	-48865	00000	00000	00000	00000	49163	49282	49465	49177	-49180	00000						
5	17	00000	00000	00000	00000	00000	-48918	00000	-49222	00000	49277	49354	00000	00000	00000						
5	24	00000	00000	00000	00000	00000	-49127	00000	00000	00000	00000	49138	49351	49388	00000						
6	14	49149	49417	49356	49452	49161	00000	49458	49149	-49261	49610	49760	-49538	49388	00000						
6	21	-49452	00000	00000	00000	49133	-49464	00000	00000	49167	49251	00000	00000	00000	00000						
6	28	49172	49134	-49166	00000	49319	00000	49494	-49354	49513	49466	-49345	49783	49102	00000						
7	11	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
7	18	49362	-48760	-49703	-49316	49271	49639	00000	00000	49235	00000	49556	00000	00000	00000						
7	25	-49187	49154	-49358	49222	49148	49168	00000	-49368	49140	49786	49352	49229	-48845	00000						
8	08	00000	00000	00000	00000	00000	49158	00000	49378	00000	49258	-49193	49230	49950	00000						
8	15	00000	00000	00000	00000	00000	-49201	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
8	22	-49212	49101	49262	-49667	-49581	49441	49340	-49365	49441	49844	49785	49330	49489	00000						
8	29	00000	49155	00000	-49209	-49274	-49230	49818	49237	-49400	-49365	49120	-49160	-49871	00000						
9	05	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49234	00000						
9	12	-49418	-49615	-48447	00000	49132	49205	00000	-48274	49305	49235	00000	00000	49234	00000						
9	19	49105	-49208	00000	49605	50101	-49350	49181	-49119	49146	49161	-49169	-49215	-49215	00000						
9	26	-49193	-49238	-49211	49897	00000	49211	49154	-49464	49437	-50114	49607	-49176	00000	00000						
10	02	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	49248	00000	00000	49165	00000	00000	00000						
10	09	49445	49459	00000	00000	-49168	-48478	00000	00000	00000	00000	48995	00000	00000	00000						
10	16	49202	-49128	-49984	-49354	49292	49656	00000	00000	00000	49152	49324	49295	49164	00000						
10	23	00000	49184	-49183	-49101	00000	-49119	-49226	-49561	50153	-49718	-49664	49486	00000	00000						
10	30	00000	00000	00000	-49280	-49182	00000	00000	49223	49123	00000	49266	49287	00000	00000						
11	06	-49270	00000	00000	00000	49281	-49138	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
11	13	00000	49281	49981	-49757	49388	00000	49812	49812	-49247	50118	49185	-49709	00000	00000						
11	20	49201	49183	49163	-49167	-49298	-48882	00000	49268	49334	00000	49257	48815	49125	00000						
11	27	-49327	00000	49401	00000	00000	00000	49171	49124	00000	00000	00000	00000	00000	00000						
12	03	49667	00000	00000	00000	00000	00000	49173	00000	00000	49172	00000	00000	00000	00000						
12	10	00000	00000	-49337	00000	00000	00000	-49547	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000						

RESEAUX DES COURBES REPRESENTATIVES DES VARIATIONS
DE TANGENTE α_1 ET α_2





4.4. S Y N T H E S E

=====

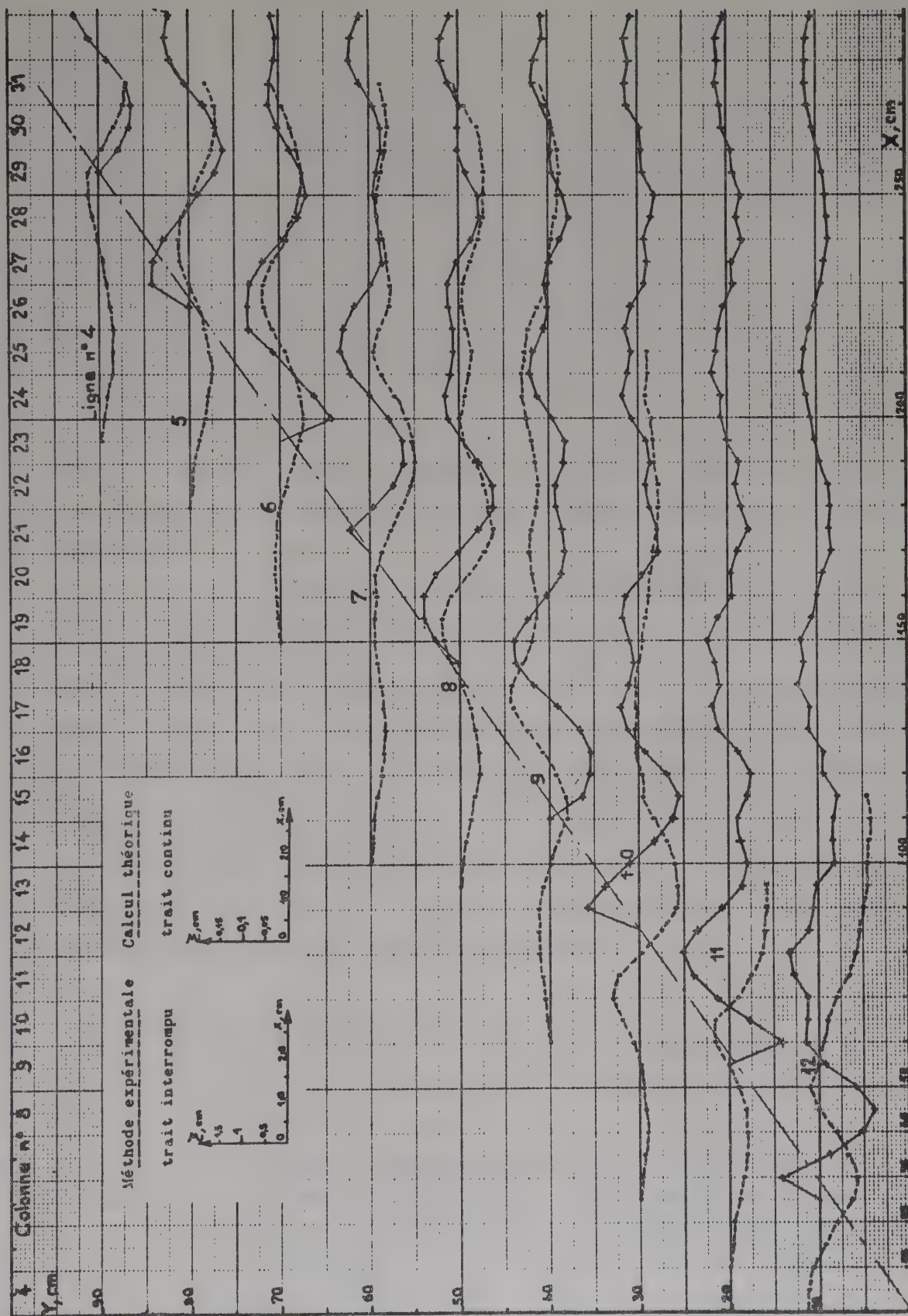
Le graphique de la page suivante représente l'ensemble des résultats obtenus pour la dénivellation de la surface libre à partir de la méthode expérimentale et du calcul théorique.

1 - Nous avons des résultats sensiblement identiques à ceux obtenus dans le chapitre précédent en ce qui concerne l'ensemble de la perturbation et la longueur d'onde.

2 - Par contre si nous suivons les amplitudes nous constatons que les amplitudes de la vague théorique et de la vague réelle sont très différentes. Nous avons intentionnellement adopté des échelles différentes pour tracer les deux systèmes de vagues. Le rapport des amplitudes est environ de 10 . Nous avons là un résultat inadmissible.

Dans la relation (13) donnant la valeur de la dénivellation ξ nous voyons que cette dernière est proportionnelle au carré du rayon du cylindre. Pour accepter les résultats précédents il faudrait donc admettre que le rayon effectif du cylindre est trois fois plus grand. Il suffit d'ailleurs de regarder de près l'écoulement autour de la tige cylindrique pour constater qu'il s'agit d'un phénomène complexe qu'aucune théorie élémentaire ne peut espérer représenter correctement.

On se contentera de regarder ce chapitre comme étant un exercice d'application d'un opérateur mathématique appelé " doublet " . Nous nous proposons de reprendre plus tard ce problème en faisant appel à des théories non linéaires.



- C O N C L U S I O N -

=====

Nous venons de présenter une nouvelle méthode de relevé des déformations d'une surface libre d'un liquide. Précisons ses limites d'application .

Pour étudier le champ de vagues d'une maquette de 1 mètre de long , la mire doit avoir approximativement pour dimensions : 3 m x 1,5. Le pas optimum du quadrillage est de 5 cm. Nous pourrions être tenté de le réduire. D'une part, le dépouillement du cliché serait considérablement augmenté , d'autre part , le repérage serait plus délicat, voir impossible, les nombreuses lignes images pouvant se superposer ou se confondre.

Il est parfaitement possible d'envisager l'utilisation de cette méthode avec des dimensions de mire différentes , pour des études sur des plus grands bassins de traction ou de giration. La méthode peut également permettre l'étude de toutes les déformations de surface libre, par exemple dans le cas de maquettes portuaires.

Nous avons donné quatre exemples d'application :

- 1 . houle droite . Compte-tenu de l'incertitude des profils nous pouvons considérer les résultats obtenus comme étant parfaitement corrects.
- 2 . champ de vagues d'une péniche . Nous avons dressé une topographie instantanée au voisinage de la carène. Nous observons que la surface libre est perturbée en avant de l'étrave .
- 3 . champ de vagues d'une carène de profondeur constante à couples rectangulaires et lignes d'eau paraboliques.

Nous avons substitué à la carène une distribution de sources et de puits . Nous constatons que la perturbation théorique de la surface libre ne représente que très partiellement les déformations réelles. L'expérience montre , en particulier , que la surface libre est perturbée bien en avant de l'étrave , d'une quantité voisine d'une longueur d'onde .

- 4 . champ de vagues d'un cylindre animé d'un mouvement de translation uniforme. la substitution au cylindre d'une répartition continue de doublets sur son axe ne permet pas de calculer les profils de vagues . La théorie linéaire n'est pas applicable dans ce cas.

En conséquence , nous rappellerons l'importance de l'expérimentation qui témoigne de phénomènes que les études théoriques ne permettent pas toujours de représenter.

- B I B L I O G R A P H I E -

- [1] VOTCEKHOVSKIJ R.J. & KOVAL A.A. - Procédé de l'ombre pour l'enregistrement de vagues sur la surface libre du liquide. Institut d'hydrodynamique de Sibérie - Académie des Sciences d'U.R.S.S. 1959 , n° 5 .
- [2] GADD G.E. & HOGBEN N.- An appraisal of ship resistance problem in the light of measurements of the wave pattern - National Physical Laboratory - Ship Division 36 - 1962 .
- [3] RAILLY J.W. & SCOTT B.F. - Height of waves in hydraulic models by the method of stereoscopy - University of Birmingham - Journal of Scientific Instruments vol. 38 , nb. 1 , 1961
- [4] VALEMBOLIS J. - Methods used at the National Hydraulic Laboratory of Chatou for measuring and recording gravity waves in models - Gravity Waves, Semicentennial Symposium, U.S. National Bureau of Standards , 18 20 juin 1951 .
- [5] LANGAGES 650 - Programme d'Assemblage Symbolique Optimal - PASO - Groupement des utilisateurs scientifiques des ordinateurs I.B.M. - 1962 .
- [6] BRARD R. - Cours d'architecture navale - Ecole Nationale Supérieure du Génie Maritime - 1956 -
- [7] LUNDE J.K. - ON THE LINEARIZED THEORY OF WAVE RESISTANCE - Society of Naval Architects and Marine Engineers - Vol.59 , 1951 .
- [8] Collection A.T.M.A .
- [9] BOURGET P.L. - Détermination expérimentale de la topographie instantanée de la vague d'accompagnement d'une carène - Annales de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes - 1963 .

- T A B L E D E S M A T I E R E S -

=====

Chapitre	Page
INTRODUCTION	1
- 1 è r e P A R T I E -	
I - EXPOSE DE LA METHODE EXPERIMENTALE	11
1.1 - Principe . Méthode de calcul.....	11
1.2 - Méthode de première approximation.....	21
1.3 - Programmation.....	26
II - EXEMPLES DE MISE EN OEUVRE DE LA METHODE.....	33
2.1 - Etude d'une houle droite.....	33
2.2.- Champ de vagues d'une péniche.....	43
- 2 è m e P A R T I E -	
III- CHAMP DE VAGUES D'UNE CARENE DE PROFONDEUR CONSTANTE A	
COUPLES RECTANGULAIRES ET LIGNES D'EAU PARABOLIQUES.....	55
3.1 - Introduction.....	55
3.2 - Etude théorique.....	57
3.3 - Application de la méthode expérimentale.....	65
3.4 - Synthèse.....	72
IV - CHAMP DE VAGUES D'UN CYLINDRE D'AXE VERTICAL ANIME D'UN	
MOUVEMENT DE TRANSLATION UNIFORME.....;	75
4.1 - Introduction.....	75
4.2 - Etude théorique.....	75
4.3 - Application de la méthode expérimentale.....	76
4.4 - Synthèse.....	101
CONCLUSION.....	105
BIBLIOGRAPHIE.....	107
TABLE DES MATIERES.....	109

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté :

DE QUELQUES CONSIDERATIONS MATHÉMATIQUES SUR LA TURBULENCE

VU

Le Directeur de Thèse,

E. RAVILLY

VU

Le Président du Jury,

E. RAVILLY

VU et APPROUVE

NANTES, le 23 SEPT 1965

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

G. BRILLOUET

VU et PERMIS d'IMPRIMER

NANTES, le 25 SEP. 1965

Le Recteur de l'Académie de Nantes,

Président du Conseil de l'Université,

M. SCHMITT

